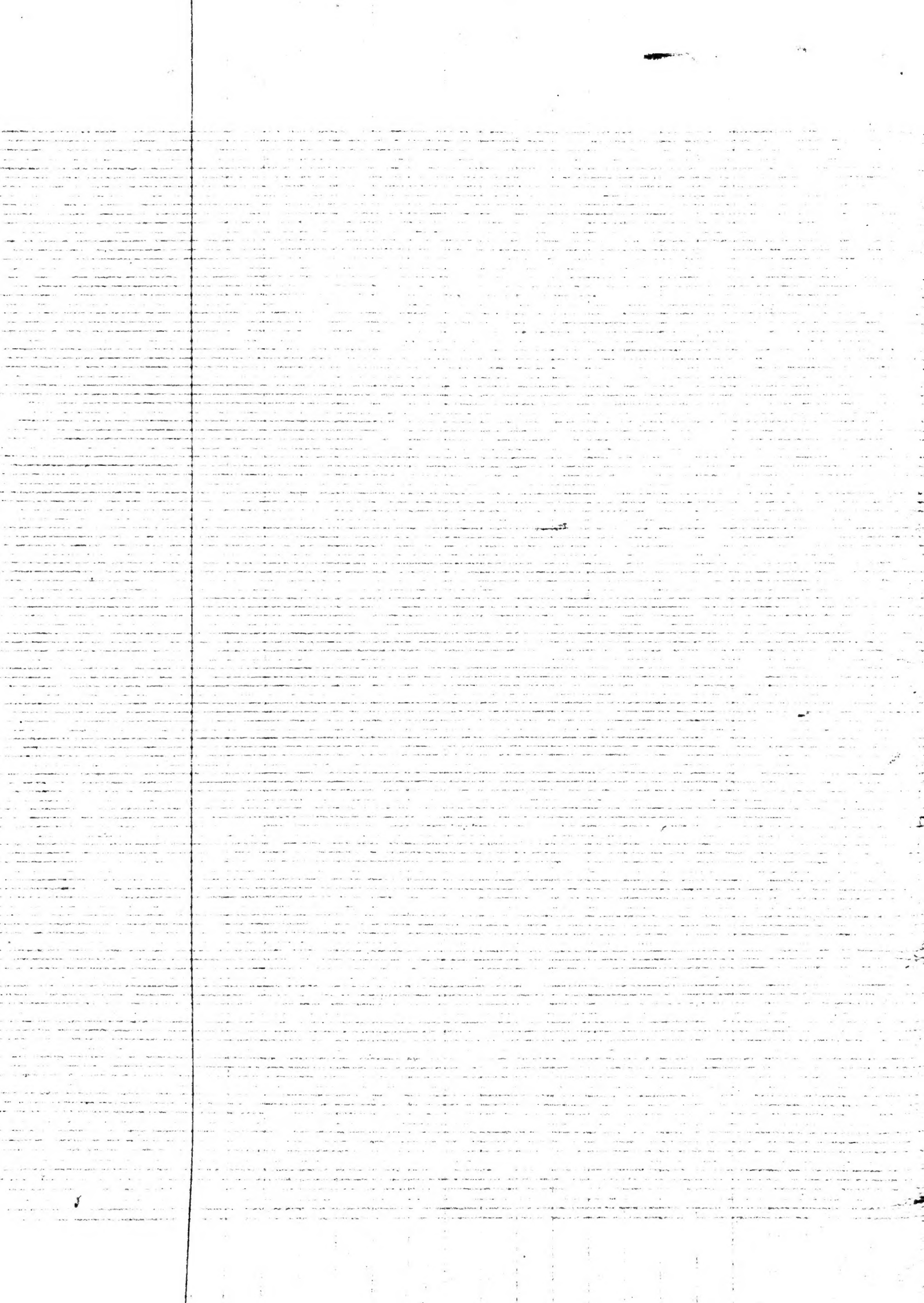


**GROUPES D'HOMOTOPIE  
DEA NICE 1982-83  
(J.-M. LEMAIRE)**



# groupes d'homotopie

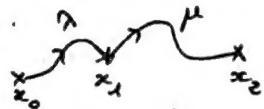
Topologie algébrique: Traduire 1 pb de topo en un pb d'algèbre. Pour traduire, on se sert d'un dictionnaire: un foncteur.

ex: Groupe fondamental  $\pi_1$  (ou groupe de Poincaré):  $X$  e.t. et  $x_0 \in X$ .

$\mathcal{C}([0,1], X)$  = ens des chemins

$\Omega(X)_{x_0}$  = ens des lacets d'origine  $x_0$

Si  $X$  esp. métrique, la topologie sur  $\mathcal{C}([0,1], X)$  est celle de la convergence uniforme.



$$\lambda \cdot \mu(t) = \begin{cases} \lambda(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Notion d'homotopie de chemins: elle permet d'introduire un groupe.

$\omega, \omega' \in \Omega(X)_{x_0}$  homotopes si 1) 2) est vérifié:

$$1) \exists H: I \times I \xrightarrow{\text{cont.}} X \quad \text{et} \quad H(t, 0) = \omega(t) \\ (t, s) \mapsto H(t, s) \quad H(t, 1) = \omega'(t)$$

$$x_0 = H(0, s) = H(1, s) \quad \forall s$$

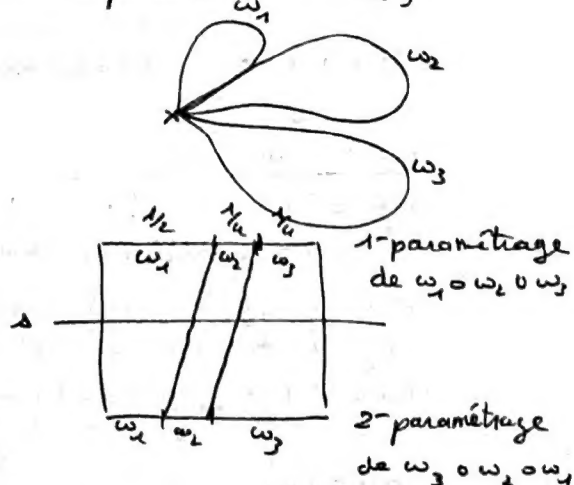
2)  $\exists \tilde{H}: [0,1] \rightarrow \Omega(X)_{x_0}$  chemin continu dans l'espace métrique  $\Omega(X)_{x_0}$  reliant  $\omega$  à  $\omega'$ .  
 $\omega \sim \omega'$  est une relation d'équivalence. La classe d'éq. de  $\omega$  est notée  $[\omega]$

$$\Omega(X)_{x_0} / \sim \cong \pi_1(X, x_0) = \{ \text{composantes connexes par arcs de } \Omega(X)_{x_0} \} \\ = \pi_0(\Omega(X)_{x_0})$$

Théorème:  $\pi_1(X, x_0)$  est un groupe.

$f: X, x_0 \rightarrow Y, y_0$  appl. continue entre 2 espaces top. pointés (ie  $f(x_0) = y_0$ ) induit une application  $\pi_1(f): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$   
 $\omega \mapsto f \circ \omega$   
 qui est un morphisme de groupes.

$\pi_1$  est un foncteur de la catégorie des e.t. dans la catégorie des groupes

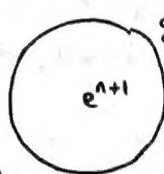


(NB: la plupart des foncteurs introduits en topo. algè. sont "continus" ie puisque  $\pi_1(X)$  est un groupe discret, localement c'est en ce sens: si 2 applications continues sont homotopes, les applications  $\pi_1(f)$  associées seront égales.)

Intérêt de cette construction?

Théorème de Brouwer:

Il n'est pas possible de rétracter continuellement la boule ou la sphère



$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

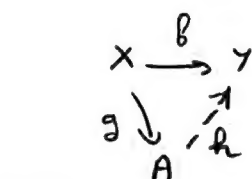
$$e^{n+1} = \text{boule unité de } \mathbb{R}^{n+1} \\ e^{n+1} \supset S^n$$

$$S^n \cong S^n \quad \text{Si n existe (n cont / n|_S^n = id)}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \nearrow & \\ e^{n+1} & \xrightarrow{F} & F(S^n) = \mathbb{Z} \\ & \text{(si le foncteur F existe)} & F(e^n) = 0 \end{array} \quad \text{alors c'est impossible! car } \mathbb{Z} \xrightarrow{=} \mathbb{Z} \begin{array}{c} \downarrow \nearrow \\ 0 \quad 0 \neq 1 \end{array}$$

Pour  $n=1$ , on peut répondre à la question grâce à  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$  et  $\pi_1(\text{point}) = 0$   
 Pour  $n \geq 2$ , on doit introduire la fonction homologie  $H_n(S^n)$ .

Tous les pb. de topo. se ramènent à :



ou :



$\exists h / h \circ \beta = \gamma$  divisibilité à droite ( $\rightarrow$  ex: Th. de Brouwer)  
 (problème d'extension)

$\exists \ell / \ell \circ \beta = \gamma$  divisibilité à gauche  
 (problème de relèvement)

( $\rightarrow$  ex: dét. du logarithme)

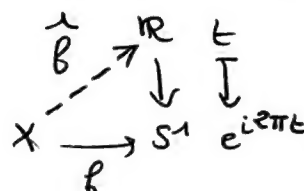
Comment relever l'application cont.  $\beta$  en  $\hat{\beta}$ ?  
 C'est la fonction  $\pi_1$  qui résout la question

$\pi_1$

$\gamma \rightarrow 0 = \pi_1(\mathbb{R})$  car  $\mathbb{R}$  contractile

$\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Si  $\hat{\beta}$  existe, il est nécessaire que  $\beta$



Problème des multiplications sur la sphère (résolu par la topo. alg.)

$S^0 = \{\pm 1\}$  et  $S^1 \simeq \mathbb{C}$  ont une structure de groupe.

$S^3 \subset \mathbb{H}$  quaternions a une structure de groupe (où  $\mathbb{H}$  de base  $\mathbb{R}^4$  de base  $1, i, j, k$  où la mult. est linéaire et  $i^2 = j^2 = k^2 =$

$i j = k$  et  $j i = -k$ , et par permutations circulaires ...

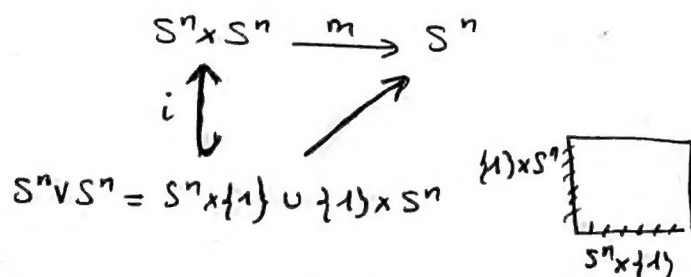
$$(a + ib + jc + kd)(a - bi - j\bar{c} - d\bar{k}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$q \bar{q} = |q|^2$$

Toutes les propriétés des nbres complexes sont vraies pour  $\mathbb{H}$  sauf la commutativité ! Ainsi  $|q| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  et on obtient  $S^3$ . D'où une structure de groupe non commutatif de  $S^3$ .

Il y a une multiplication non associative sur  $S^7$  (Kelley). Puis plus rien !

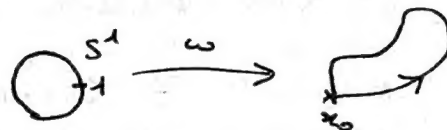
$1 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ . Trouver  $S^n \times S^n \rightarrow S^n$  tel que  $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ ,  
 c'est l'application  $m$  qui étend  $\rightarrow$  : c'est un problème d'extension



Pb résolu par Adams : il n'y a pas d'autres sphères  $S^n$  qui conviennent !



En utilisant le foncteur homologie, on montre qu'il est nécessaire pour que  $m$  existe ( $m \neq 0$ ) que  $n$  soit impair. Pour aller plus loin, il faut construire un espace auxiliaire et un autre foncteur. L'espace attaché à  $S^n$  est ressemblé à un espace projectif (c'est  $S^{n+1} \cup e^{2n+2}$ ) et on constaterait que si la sphère  $S^n$  convient, alors  $n = 2^k - 1$  et  $k \leq 3$  (Recherches de Hopf 1935, Adem 1950 Adams 1958)



### Groupes d'homotopie :

Ils généralisent les  $\pi_n(X, x_0)$ . On peut dire que  $\Omega X_{x_0} = \mathcal{C}^*(S^1, -1; X, x_0)$

On peut considérer :

$$\pi_0(\Omega X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$

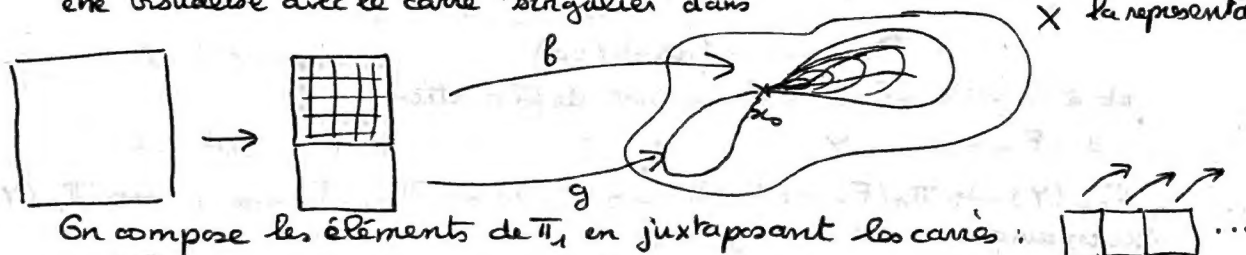
$$\text{def} \rightarrow \pi_n(X, x_0) = \pi_0 \mathcal{C}^*(S^n, -1; X, x_0)$$

Notons  $\pi_0 \mathcal{C}^*(X, x_0; Y, y_0) = [X_{x_0}, Y_{y_0}]^*$  = ensemble des classes d'homotopie respectant les points de base  $x_0$  et  $y_0$ .

### Théorème :

$\pi_n$  est un ensemble si  $n=0$ , un groupe si  $n=1$ , un groupe abélien si  $n \geq 2$ .

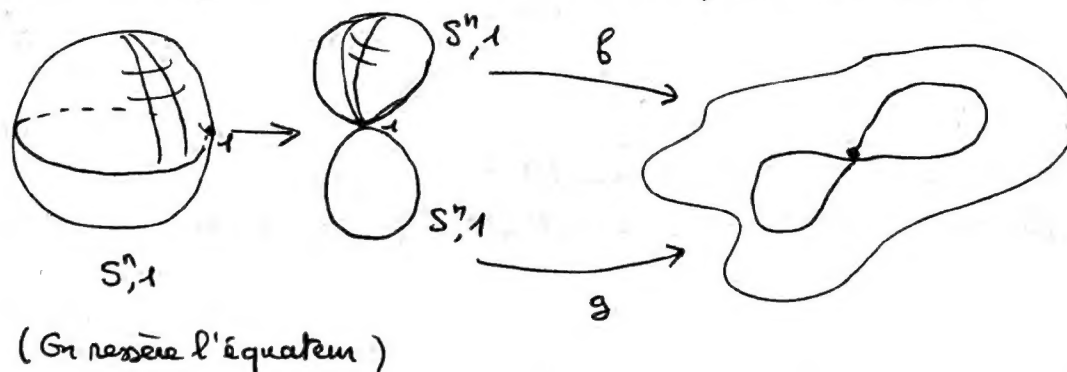
NB :  $\mathcal{C}^*(I^n, \partial I^n; X, x_0) = \pi_n(X, x_0)$  où  $I = [0, 1]$ . Ainsi  $\pi_2$  peut être visualisé avec le carré "singulier" dans la représentation (b).



$$\text{Définitions : } \pi_n(X, x_0) = [S^n, -1; X, x_0]^* \quad (a)$$

$$= [I^n, \partial I^n; X, x_0]^* \quad (b)$$

Dessin dans la représentation (a) : comment composer les éléments ?



(Remarque :  $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X)$  si  $n \geq 2$ . fournit une dém. du théorème)

On sait peu de chose sur les  $\pi_n$ , si ce n'est quelques cas particuliers :  
 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , théorème de Van Kampen (non abordé car on ne parlera pas de  $\pi_1$ ). On a  $\pi_n(S^1) = 0$  si  $n \geq 2$  car  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  est un revêtement et :

\* Si  $\tilde{X} \rightarrow X$  est un revêtement, on a  $\pi_n(\tilde{X}) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X)$  et si  $n \geq 2$   $\pi_1(\tilde{X}) \hookrightarrow \pi_1(X)$ .

\* Si  $X$  est contractible,  $\forall n \geq 2$   $\pi_n(X) = \pi_n(\text{point}) = 0$ .

\* Si  $n \geq 2$   $\pi_i(S^n) = 0, i < n$  (Stone Weierstrass et Th. Sard)

\*  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$  (théorie du degré = Th. de Hurewicz)

\* Ayant construit l'homologie  $H_n(X)$ , on a  $h: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$  foncteur, et on a le :

Théorème d'Hurewicz  $\rightarrow$  Si  $X$  est  $n$ -connexe, ie  $\pi_k(X) = 0 \forall k \in [0, n]$ , alors  $\pi_{n+1}(X) \cong H_{n+1}(X)$   
 $\pi_1(X) = 0 \quad \pi_i(X) = 0$  si  $i < n$  alors  $\left. \begin{array}{l} h_n \text{ isomorphisme} \\ h_{n+1} \text{ surjectif} \end{array} \right\}$

d'où  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$  car  $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$

\* Que dire de  $\pi_i(S^n)$  ( $i > n$ ) ? Hopf et Hurewicz ont montré que

$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ , et si  $i \geq 3$   $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$

L'application local. d'une submersion propre est une fibration.

On montre que  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  grâce à la fibration :

$$\begin{array}{ccc} S^1 \subset S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ \cap & & \parallel \\ \mathbb{C} & \mathbb{C}^2 & \mathbb{R}_+(\mathbb{C}) \end{array}$$

la fibre est  $S^1 =$  fibres compl. de  $|z|=1$

$$(a, b) \longmapsto (ax + by = 0)$$

et à la suite exacte d'homotopie de fibration :

$$F \rightarrow X \rightarrow Y$$

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(Y).$$

Soi on a :

$$\text{ex: } \begin{array}{ccccccc} \pi_2(S^3) & \rightarrow & \pi_2(S^2) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(S^1) & \rightarrow & \pi_1(S^3) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array} \quad \text{d'où } \pi_2(S^2) = \mathbb{Z} \quad (\text{sans Hurewicz})$$

$$\text{ex: } \begin{array}{ccccccc} \pi_3(S^1) & \rightarrow & \pi_3(S^3) & \xrightarrow{\cong} & \pi_3(S^2) & \rightarrow & \pi_2(S^1) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array} \quad \text{d'où } \pi_3(S^2) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z} \quad (\text{admn})$$

# Homologie

(ref: Massey, Algebraic topology: an introduction)

Une paire d'e.t.  $(X, A)$  est un couple d'e.t. tel que  $A \subset X$ . Un morphisme de paires  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est une application continue qui vérifie  $f(A) \subset B$ . On obtient ainsi une catégorie: la catégorie  $\text{Pair Top}$  des paires d'e.t.

On décide de construire un foncteur  $H_*$  de la catégorie des paires d'e.t. dans celle des  $R$ -modules gradués, où  $R$  est un anneau.

## I Axiomes d'une théorie de l'homologie (Eilenberg - Steenrod)

Un foncteur homologie est un foncteur  $H_*: \text{Pair Top} \rightarrow R\text{-mod. gradués}$  tel que pour tout triplet  $(X, A, B)$  d'e.t. vérifiant  $B \subset A \subset X$  il existe un morphisme de  $R$ -modules gradués

$$\partial_* = \{\partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: H_*(X, A) \rightarrow H_*(A, B)$$

appelé "opérateur bord", qui vérifie

$$\partial_n: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B)$$

et les 4 axiomes:

(A1) Axiome d'exactitude: Si  $(A, B) \hookrightarrow (X, B) \hookrightarrow (X, A)$  sont les injections canoniques, on a la suite exacte de  $R$ -modules:

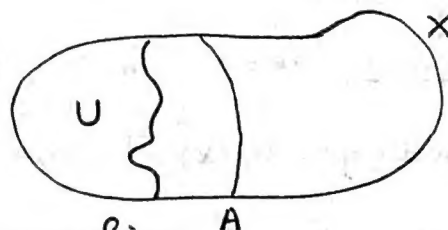
$$\begin{aligned} & \hookrightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \hookrightarrow \\ & \hookrightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow H_{n-1}(X, B) \rightarrow H_{n-1}(X, A) \hookrightarrow \\ & \hookrightarrow \dots \end{aligned}$$

(A2) Homotopie: Si  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sont 2 morphismes de paires homotopes<sup>(\*)</sup>, et si  $f_*, g_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ , on a  $f_* = g_*$ .

(A3) Axiome d'excision:

Si  $i: (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$  est l'injection canonique et si  $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$  alors:

$i_*: H_*(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\sim} H_*(X, A)$  est un isomorphisme.



(A4) Axiome de la dimension <sup>(\*)2</sup>:

$$H_n(\text{point}) = \begin{cases} R & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarques:

Les axiomes (A1) et (A2) sont vérifiées par l'homotopie, mais non (A3).

(A1), (A2) et (A3) donnent une théorie de l'homologie extraordinaire.

(\*)1:  $f$  et  $g$  sont 2 morphismes de paires homotopes si  $\exists F: X \times I \rightarrow Y$

$F(n, t) = f_t(n)$ ,  $f_0 = f$  et  $f_1 = g$  et  $\forall t \in I$   $f_t(A) \subset B$ .

(\*)2: On note  $H_*(X) = H_*(X, \emptyset)$  et  $H_*(X; R)$  l'homologie sur  $X$  à coefficient dans l'anneau  $R$ .

Le théorème suivant justifie le nom donné à l'axiome (A4) puisqu'il permet de distinguer les sphères  $S^n$  au seul regard de l'homologie.

On notera que sur les polyèdres toutes les théories de l'homologie à coefficient dans un anneau fixé  $R$  coïncident.

Théorème: Si  $n > 0$   $H_i(S^n) = \begin{cases} R & \text{si } i=0 \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et  $H_i(S^0) = \begin{cases} R \oplus R & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

preuve:  $S^0 = \{-1\} \cup \{+1\} = a \cup b$  et l'axiome (A1) appliqué à la paire  $(S^0, a) \doteq (S^0, a, \emptyset)$  donne la suite exacte:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(S^0, a) & \xrightarrow{\partial_1} & H_0(a) & \longrightarrow & H_0(S^0) & \longrightarrow & H_0(S^0, a) \xrightarrow{\partial_0} 0 = H_{-1}(a) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ \text{I2 (ax A3)} & & R & & & & \text{I2 (ax A3)} \\ H_1(b) & & & & & & H_0(b) \\ \parallel & & & & & & \parallel \text{ (ax A4)} \\ 0 & & & & & & R \end{array}$$

donc  $0 \rightarrow R \rightarrow H_0(S^0) \rightarrow R \rightarrow 0 \Rightarrow H_0(S^0) = R \oplus R$  (\*)

De même, si  $n > 0$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(a) & \longrightarrow & H_n(S^0) & \longrightarrow & H_n(S^0, a) \longrightarrow \dots \\ & & \parallel & & & & \parallel \text{ (A3)} \\ & & 0 & & & & H_n(b) = 0 \end{array}$$

donc  $H_n(S^0) = 0$  si  $n > 0$ .

\* Pour  $S^1$ : on utilise le lemme

Lemme:  $\forall x \in X \begin{cases} H_n(X, x) \cong H_n(X) \text{ pour } n > 0 \\ H_0(X) \cong H_0(x) \oplus H_0(X, x) \cong R \oplus H_0(X, x) \end{cases}$

(On dit que  $\tilde{H}_n(X) = H_n(X, x)$  est l'homologie réduite)

(\*) car la suite est scindée, cf AL1 et  $R = R$ -module libre)



Montrons le lemme :

$$H_n(x) \rightarrow H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, x) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(x) \rightarrow \dots$$

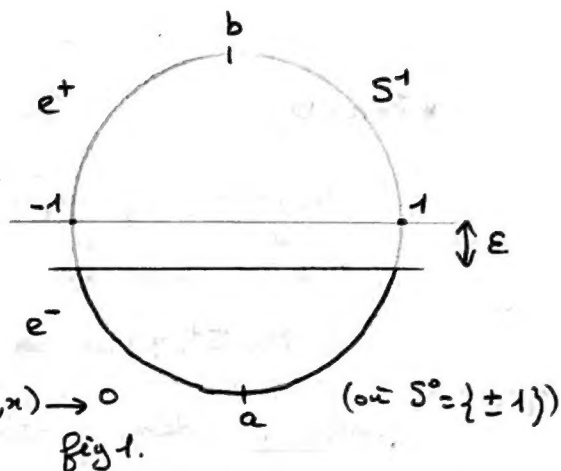
montre que si  $n \geq 2$ ,  $j_*$  est un isomorphisme

(car  $H_n(x) = H_{n-1}(x) = 0$  d'après A4)

Si  $n=1$ , on a :

$$H_1(x) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, x) \xrightarrow{\partial_1} H_0(x) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \rightarrow H_0(X, x) \rightarrow 0$$

$\parallel$   
 $\mathbb{R}$



Mais  $i_* : H_0(x) \rightarrow H_0(X)$  est injective car  $i : \{x\} \hookrightarrow X$  et il existe  $r : X \rightarrow \{x\}$  (l'appl. constante) telle que  $ro i = id_{\{x\}} \Rightarrow r_* \circ i_* = id_{H_0(x)}$ , de plus  $r_*$  est un inverse à gauche de  $i_*$ , donc cette suite exacte est scindée en  $H_0(X)$ , ie  $H_0(X) = H_0(x) \oplus H_0(X, x)$ . (cf. Hu, introduction to homological algebra : Corollaires 5.8 et 5.9 p 34)

Il suffit donc de connaître l'homologie réduite  $H_n(S^1, a)$  pour obtenir  $H_n(S^1)$ .

Soit  $e^+ = S^1 \cap \{y \geq 0\}$ ,  $e^- = S^1 \cap \{y \leq 0\}$ .

$i : (S^1, a) \hookrightarrow (S^1, e^-)$  et il existe une déformation-rétraction

$r : (S^1, e^-) \rightarrow (S^1, a)$  (ie  $r$  est une rétraction et  $ro i$  homotope à l'id), de sorte que l'axiome (A2) donne :

$$H_n(S^1, a) \simeq H_n(S^1, e^-)$$

Soit  $U = S^1 \cap \{y < -\epsilon\}$ . L'excision (A3) donne :  $H_n(S^1, a) \simeq H_n(S^1 \setminus U, e^- \setminus U)$

Finalement,  $H_n(S^1, a) \simeq H_n(e^+, S^0)$ , et on peut utiliser la suite exacte de la paire  $(e^+, S^0)$  :

\* Si  $n \geq 2$ , on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H_n(S^1 \setminus U, e^- \setminus U) & & \\ & & & & \uparrow ? \text{ (par déformation-rétraction)} & & \\ H_n(S^0) & \rightarrow & H_n(e^+) & \rightarrow & H_n(e^+, S^0) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(S^0) \\ \parallel & & \uparrow ? \text{ (par déf-rétraction)} & & \parallel & & \\ 0 & & H_n(b) = 0 & & 0 & & \end{array}$$

d'où  $H_n(S^1 \setminus U, e^- \setminus U) \simeq 0 \Rightarrow H_n(S^1) = 0$  si  $n \geq 2$ .

Le même diagramme permet de conclure si  $n=0$  ou 1 si on le complète convenablement :

\* Si  $n=1$ , on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H_1(S^1 \setminus U, e^- \setminus U) & & \\ & & & & \uparrow ? \text{ (déf-rétract)} & & \\ H_1(S^0) & \rightarrow & H_1(e^+) & \rightarrow & H_1(e^+, S^0) & \rightarrow & H_0(S^0) \rightarrow H_0(e^+) = \mathbb{R} \\ \parallel & & \uparrow ? \text{ (déf-rétract)} & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & H_1(b) = 0 & & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ & & & & (x, y) \mapsto x+y & & \\ & & & & \text{de noyau } \mathbb{R} & & \\ & & & & \text{donc } H_1(e^+, S^0) = \mathbb{R} \simeq H_1(S^1) & & \end{array}$$

\*  $\text{Si } n=0,$

$$H_0(S^1, \mathbb{R})$$



$$\begin{array}{ccccccc} H_0(S^0) & \longrightarrow & H_0(e^+) & \longrightarrow & H_0(e^+, S^0) & \xrightarrow{\partial} & H_{-1}(S^0) \\ \uparrow \text{R} & & \uparrow \text{R} & & \uparrow \text{O} & & \uparrow \text{O} \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \mathbb{O} & & \mathbb{O} \end{array}$$

d'où  $H_0(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{O} \Rightarrow H_0(S^1) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{O} = \mathbb{R}$

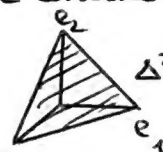
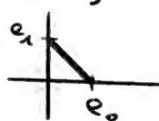
\* Pour  $S^n$  : démonstration par récurrence. CQFD

## II Homologie singulière.

Soit  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de la base canonique  $(e_0, \dots, e_n)$ . Le  $n$ -simplexe standard  $\Delta^n = \{ \sum t_i e_i / \sum t_i = 1 \text{ et } t_i \geq 0 \}$  est l'enveloppe convexe des vecteurs de base.

$\Delta^0 = \{0\} \subset \mathbb{R}$

$\Delta^1 \simeq [0, 1]$



$\Delta^2 = \text{triangle équilatéral}$

$\Delta^n$  est un convexe compact de  $\mathbb{R}^n$ , donc homéomorphe à une boule de  $\mathbb{R}^n$ . Numérotés les sommets du simplexe  $\Delta^n$  revient à orienter l'hyperplan qui le contient. Une face de  $\Delta^n$  est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble des sommets  $\{e_0, \dots, e_n\}$ . Plus précisément si  $\gamma: \{0, \dots, p\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  est injective et croissante,  $p \leq n$ , elle détermine une application

$$\Delta^p \hookrightarrow \Delta^n$$

donc une  $p$ -face de  $\Delta^n$ .

$$\sum t_i e_i \mapsto \sum t_{\gamma(i)} e_{\gamma(i)}$$

et la  $i$ -face de  $\Delta^n$  est déterminée par  $\delta_i: \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ ,  $\delta_i$  ne contenant pas le sommet  $e_i$ .

Un  $n$ -simplexe singulier de l'e.t.  $X$  est une application continue  $\Delta^n \rightarrow X$ . On note  $S_n(X)$  cet ensemble. Le  $\mathbb{R}$ -module libre de base  $S_n(X)$  s'appelle l'ensemble des  $n$ -chaînes singulières et se note  $C_n(X) = \mathbb{R}^{(S_n(X))}$ .

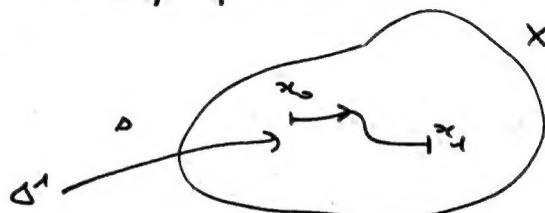
$$\begin{cases} S_n(X) = \text{ensemble des } n\text{-simplices singuliers} \\ C_n(X) = \mathbb{R}\text{-module libre des } n\text{-chaînes singulières} = \mathbb{R}^{(S_n(X))} \end{cases}$$

On pose  $S_n(X) = C_n(X) = \mathbb{O}$  si  $n < 0$ , et on remarque que  $C_0(X) = \mathbb{R}^{(X)}$ .



2-simplexe singulier

$$\partial \Delta = [0, 1] + [1, 2] - [0, 2]$$



1-simplexe singulier = chemin de  $X$

$$\partial \Delta = x_1 - x_0$$

Définition : opérateur bord

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(X) &\longrightarrow C_{n-1}(X) \\ \alpha &\longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha \circ \delta_i = \partial_n \alpha \end{aligned}$$

où  $\Delta^{n-1} \xrightarrow{\delta_i} \Delta^n$  désigne la  $i$ -face de  $\Delta^n$ .

Cet opérateur vérifie  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  de sorte que l'on obtienne un complexe de chaînes

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots = C_*(X)$$

On note  $C_*(X) = C(X) = \{C_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté. On pose toujours  $Z_n(X) = \text{Ker } \partial_n$  et  $B_n(X) = \text{Im } \partial_{n+1}$ . Le défaut d'exactitude de la suite est mesuré par le quotient :

$$H_n(X) \doteq \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = n\text{-ième module d'homologie sing. de } X.$$

Homologie relative : Il s'agit maintenant de définir l'homologie d'une paire topologique  $(X, A)$ . Soit  $A \subset X$ . On a les inclusions évidentes :

$$\begin{array}{ccc} S_n(A) \hookrightarrow S_n(X) & \text{et} & C_n(A) \xrightarrow{i_n} C_n(X) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{n-1}} & & C_{n-1}(X) \end{array}$$

de sorte que  $C(A) = \{C_n(A)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  constitue un sous-complexe de chaînes de  $C(X)$ .

$C_n(X, A) \doteq \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$  est un  $R$ -module libre qui s'appelle le module

des  $n$ -chaînes relatives de  $X$  modulo  $A$ .

L'opérateur  $\partial$  passe au quotient :  $\bar{\partial}_n : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$  de sorte que l'on puisse poser :

$$H_n(X, A) = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}_n}{\text{Im } \bar{\partial}_{n+1}} = \underline{n\text{-ième module d'homologie relative de } X \text{ modulo } A.}$$

On peut poser, comme dans Cramayrolle,

$$Z_p(X, A) = \{ \alpha \in C_p(X) \mid \partial_p \alpha \in C_{p-1}(A) \}$$

et

$$B_p(X, A) = \{ \alpha \in C_p(X) \mid \exists \gamma \in C_{p+1}(X) \quad \alpha = \partial_{p+1} \gamma \text{ mod. } C_p(A) \}$$

et il est facile de voir que  $H_n(X, A) \simeq \frac{Z_p(X, A)}{B_p(X, A)}$

$Z_p(X, A)$  est le  $R$ -module des cycles relatifs, et  $B_p(X, A)$  le  $R$ -module des  $p$ -bords relatifs modulo l'ensemble  $A$ .

Notre foncteur homologie sera parfaitement défini si l'on sait associer à chaque application continue  $f: X \rightarrow Y$  une homomorphisme de  $R$ -modules  $f_*: H(X) \rightarrow H(Y)$  où  $H(X) = \{H_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $H(Y) = \{H_n(Y)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Pour  $C_n(X) \xrightarrow{C_n(f)} C_n(Y)$   
 $\sigma \mapsto f \circ \sigma$  pour tout  $n$ -simplexe  $\sigma$ , le tout étant prolongé par linéarité.  $C_n(f)$  applique les cycles sur les cycles et les bords sur les bords, donc passe au quotient et détermine un homomorphisme :

$$H_n(f) = f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

De même, une application de paires topo.  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  induit un morphisme de  $R$ -modules  $f_*: H(X, A) \rightarrow H(Y, B)$  de façon évidente.

Il nous reste maintenant à vérifier que le foncteur  $H$  de la catégorie des paires topologiques dans la catégorie des  $R$ -modules gradués vérifie les 4 axiomes d'Eilenberg-Sternrod. L'axiome (A4) de la dimension est évidente. Montrons :

#### 1° Axiome d'exactitude (A1)

Démontrons 2 propositions d'algèbre différentielle graduée :  $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  désigne un complexe de chaîne, ie un  $R$ -module gradué muni d'une différentielle  $\partial = \{\partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de degré  $-1$  ( $\partial \partial = 0$ )

Proposition 1 : Pour toute suite exacte de complexes de chaînes ( $u$  et  $v$  étant des morphismes de chaînes) :

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$$

on a la suite exacte longue d'homologie

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{u_*} H_n(B) \xrightarrow{v_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

(preuve : cf. cah-1, page 18)

Proposition 2: Soit le triple  $(X, A, B)$  d'e.t.  $X \supset A \supset B$

Alors :

$$C(X, A) \simeq \frac{C(X, B)}{C(A, B)}$$

preuve : on utilise le lemme des 9 et le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \circ & & \circ & & \circ & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \circ & \rightarrow & C(B) & \rightarrow & C(A) & \rightarrow & C(A, B) \rightarrow \circ \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \circ & \rightarrow & C(B) & \rightarrow & C(X) & \rightarrow & C(X, B) \rightarrow \circ \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & C(X, A) & \xrightarrow{\sim} & \frac{C(X, B)}{C(A, B)} \rightarrow \circ \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \circ & & \circ & & \circ
 \end{array}$$

} commencer par  
écrire ces 2 lignes  
exactes

qui prouve que  $C(X, A) \simeq \frac{C(X, B)}{C(A, B)}$  C.F.D

Rappel : (Lemme des 9) : Si dans le diagramme suivant 5 suites sont exactes, la dernière l'est aussi :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \circ & & \circ & & \circ & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \circ & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow \circ \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \circ & \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' \rightarrow \circ \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \circ & \rightarrow & A'' & \rightarrow & B'' & \rightarrow & C'' \rightarrow \circ \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \circ & & \circ & & \circ
 \end{array}$$

On déduit l'axiome d'exactitude (A1) : La pro. 2 montre que l'on a la suite exacte de complexes de chaînes :

$$\circ \rightarrow C(A, B) \rightarrow C(X, B) \rightarrow C(X, A) \rightarrow \circ$$

et la pro. 1 affirme l'existence de la suite exacte longue d'homologie :

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

ce qui prouve (A1) pour l'homologie singulière.



Remarque: On peut déduire l'axiome d'exactitude du lemme du serpent :

lemme du serpent<sup>(\*)</sup>: Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array} \quad (\text{ce sont des } R\text{-mod.})$$

Alors :

- 1) les suites (i)  $\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma$   
et (ii)  $\text{Coker } \alpha \rightarrow \text{Coker } \beta \rightarrow \text{Coker } \gamma$   
induites par  $f, g, f'$  et  $g'$  sont exactes

2) Il existe un  $R$ -homomorphisme  $h: \text{Ker } \gamma \rightarrow \text{Coker } \alpha$  qui connecte les 2 suites exactes (i) et (ii) en une seule suite exacte :

$$\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma \xrightarrow{h} \text{Coker } \alpha \rightarrow \text{Coker } \beta \rightarrow \text{Coker } \gamma$$

(cette suite s'appelle la suite Ker-Coker)

preuve: On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{f_1} & \text{Ker } \beta & \xrightarrow{g_1} & \text{Ker } \gamma & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Coker } \alpha & \xrightarrow{f'_1} & \text{Coker } \beta & \xrightarrow{g'_1} & \text{Coker } \gamma & & \end{array}$$

Le morphisme  $h$  est représenté par une flèche courbe allant de  $\text{Ker } \gamma$  à  $\text{Coker } \alpha$ .

a) Les suites (i) et (ii) existent et sont exactes car :

(1)  $\text{Ker } g_1 = \text{Im } f_1$

$\forall x \in \text{Ker } g_1, g_1(x) = 0$  et  $x \in B / g(x) = g_1(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } g = \text{Im } f$   
donc  $\exists y \in A, x = f(y)$ .

(\*) du nom de l'auteur

$$\text{On a } x \in \text{Ker } \beta \Leftrightarrow f(y) \in \text{Ker } \beta \Leftrightarrow \beta \circ f(y) = 0 \Leftrightarrow f'(\alpha(y)) = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(y) = 0 \text{ car } f' \text{ injective}$$

d'où  $y \in \text{Ker } \alpha$  et  $x = f(y) \in \text{Im } f_1$

Ainsi  $\text{Ker } g_1 \subset \text{Im } f_1$

$$\ast \forall x \in \text{Im } f_1 \quad x = f_1(y) = f(y) \text{ où } y \in \text{Ker } \alpha \\ \text{et } g_1(x) = g \circ f(y) = 0 \Rightarrow \text{Im } f_1 \subset \text{Ker } g_1.$$

$$(2) \text{Ker } g'_1 = \text{Im } f'_1$$

$$\ast \forall x \in \text{Ker } g'_1 \quad g'_1(x) = 0 \Leftrightarrow \overline{g'(x)} = 0 \Leftrightarrow g'(x) \in \text{Im } g \\ \exists y \in C \quad g'(x) = g(y) \text{ et } g \text{ surjective} \Rightarrow \exists z \in B \quad y = g(z) \\ \text{donc } g'(x) = g \circ g(z) = g' \circ \beta(z)$$

$\Downarrow$

$$x - \beta(z) \in \text{Ker } g' = \text{Im } f' \text{ donc } \exists t \in A' \quad x - \beta(z) = f'(t)$$

$$\text{En passant au quotient : } \overline{x - \beta(z)} = \overline{f'(t)} = f'_1(\bar{t}) \text{ où } \bar{t} \in \text{Coker } \alpha \\ \text{et } \overline{\beta(z)} = 0 \Rightarrow x \in \text{Im } f'_1 \text{ donc } \text{Ker } g'_1 \subset \text{Im } f'_1$$

$$\ast \forall x \in \text{Im } f'_1 \quad \exists y \in \text{Coker } \alpha \quad x = f'_1(y) \Rightarrow x = g'(y) \\ \text{donc } g'_1(x) = g'_1 \circ f'_1(y) = \overline{g' \circ \beta(y)} = \overline{0} = 0 \text{ et } \text{Im } f'_1 \subset \text{Ker } g'_1.$$

b) Existence de  $h$  : (connecting morphism)

Si  $x \in \text{Ker } g \subset C \quad \exists b \in B \quad x = g(b)$ . Alors  $\beta(b) \in B'$  et  $\exists ! a' \in A'$  tel que  $\beta'(a') = \beta(b)$

On pose  $h(x) = a' \in \text{Coker } \alpha$

(1)  $h$  est bien définie car il ne dépend pas du choix de  $b \in B / g(b) = x$ .  
En effet, si  $b' \in B / g(b') = x$ , on a :

$$g(b - b') = 0 \Rightarrow \beta(b - b') = \beta'(a' - a) = 0 \text{ et } \beta' \text{ inj} \\ \text{donc } a = a' \Rightarrow \bar{a} = \bar{a'} \text{ oui}$$

(2) Connexion entre les 2 suites exactes : on montre facilement que  
(2.1)  $\text{Ker } h = \text{Im } g_1$  et (2.2)  $\text{Im } h = \text{Ker } \beta'_1$ .

Montrons par exemple (2.1) :

$$(2.1) \text{Ker } h = \text{Im } g_1.$$

$$\ast \forall x \in \text{Ker } h \quad h(x) = 0, \text{ mais par définition } h(x) = \bar{a} \text{ où } \begin{cases} \beta'(a) = \beta(b) \\ \text{et} \\ x = g(b) \end{cases}$$

$$\text{Alors } \bar{a} = 0 \Leftrightarrow a \in \text{Im } \alpha \Leftrightarrow \exists z \in A \quad \alpha(z) = a$$

$$\text{et } \beta'(\alpha(z)) = \beta(b) \Leftrightarrow \beta \circ f(z) = \beta(b) \Leftrightarrow \beta(z) - b \in \text{Ker } \beta$$

$$\text{donc } g(\underbrace{b - \beta(z)}_{\in \text{Ker } \beta}) = g(b) = x \Rightarrow x \in \text{Im } g_1. \text{ ainsi } \text{Ker } h \subset \text{Im } g_1.$$

\*  $\forall x \in \text{Im } g, x = g(y)$  où  $y \in \text{Ker } \beta$  et  $h(x) = \tilde{a}$  où  $\begin{cases} \beta'(a) = \beta(b) \\ \text{et} \\ x = g(b) \end{cases}$   
 On peut prendre  $b = y$ , de sorte que  $\beta'(a) = \beta(y) = 0$  et  $\tilde{a} = 0$  ( $\beta \text{ inj}$ )  
 donc  $\tilde{a} = 0$ .  
 Ainsi  $\text{Im } g_1 \subset \text{Ker } h$ .

CQFD

Ce lemme étant établi, comment montrer l'axiome d'exactitude ?  
 Si  $\bar{\partial}_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$  est l'homomorphisme bord de l'homologie relative, posons :

$$Z_n(X, A) = \text{Ker } \bar{\partial}_n$$

$$Z'_n(X, A) = \text{Coker } \bar{\partial}_{n+1} \doteq C_n(X, A) / \text{Im } \bar{\partial}_{n+1}$$

On définit naturellement  $\bar{\partial}'_n : Z'_n(X, A) \rightarrow Z_n(X, A)$  et l'on s'aperçoit que l'on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} Z'_n(A, B) & \longrightarrow & Z'_n(X, B) & \longrightarrow & Z'_n(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \bar{\partial}''_n & & \downarrow \bar{\partial}''_n & & \downarrow \bar{\partial}'_n & & \\ 0 \longrightarrow & Z_n(A, B) & \longrightarrow & Z_n(X, B) & \longrightarrow & Z_n(X, A) & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(lignes exactes} \\ \text{diag. com.)} \end{array}$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme du serpent en remarquant que  
 $\text{Ker } \bar{\partial}'''_n = H_n(A, B) = \text{Coker } \bar{\partial}'''_n$   
 $\text{Ker } \bar{\partial}''_n = H_n(X, B) = \text{Coker } \bar{\partial}''_n$   
 $\text{Ker } \bar{\partial}'_n = H_n(X, A) = \text{Coker } \bar{\partial}'_n$

CQFD

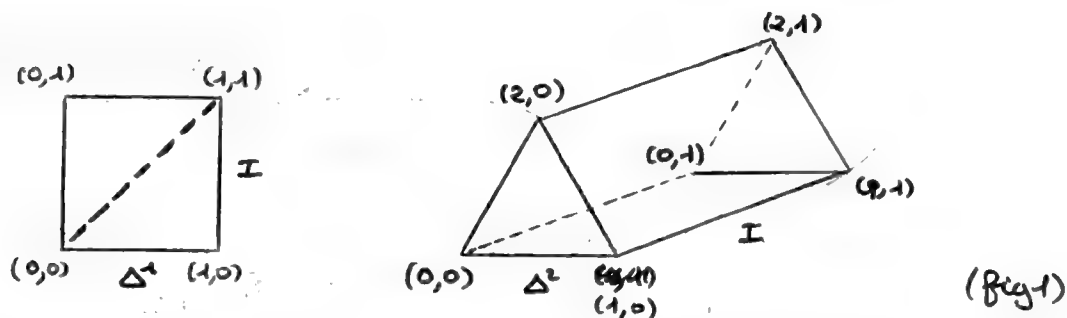
## 2° Axiome d'homotopie (A2)

Considérons 2 applications  $f, g : X \rightarrow Y$  homotopes. Il existe une appl. continue  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que  $F_0 = f$  et  $F_1 = g$  où  $F_t = F(\cdot, t)$

Si  $f : X \rightarrow Y$ , on rappelle que l'on peut définir  $f : C(X) \rightarrow C(Y)$ , morphisme de chaînes, tel que pour tout simplexe  $\sigma \in S_n(X)$  on ait :  $f(\sigma) = f \circ \sigma \in S_n(Y)$ .

Problème : Construire une notion d'homotopie dans les complexes de chaînes et les morphismes de chaînes, notion qui soit conservée par le foncteur  $X \mapsto C(X)$ .

Si  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  est un  $n$ -simplexe et  $I = [0, 1]$ ,  $\Delta^n \times I$  s'appelle un prisme et l'on pose :  $\sigma \times \text{id} : \Delta^n \times I \rightarrow X \times I$



Si  $F$  est une homotopie de  $f$  à  $g$ , on pourra composer :

$$\Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times \text{id}} X \times I \xrightarrow{F} Y$$

On peut toujours découper les prismes  $\Delta^n \times I$  de façon à obtenir une chaîne de  $(n+1)$ -simplices. Pour cela, on considère :

$$\begin{aligned} \{0, \dots, n+1\} &= \Delta^{n+1} \xrightarrow{\tau_i} \Delta^n \times I \quad (0 \leq i \leq n) \\ j &\longmapsto (j, 0) \text{ si } j \leq i \\ j &\longmapsto (j-1, 1) \text{ si } j > i \end{aligned}$$

On obtient  $n+1$  simplices dans le prisme  $\Delta^n \times I$ . (cf. fig 1 et 2)

(fig 2) [cas  
du prisme  $\Delta^2 \times I$

On obtient 3  
tétrahèdres ...  
comme autant

de chemin liant  $(0,0)$  à  $(2,1)$  :  $\Delta^2$

et croissants, lorsque l'on considère l'ordre produit sur les 6 sommets :

$$(a, b) < (a', b') \Leftrightarrow a < a' \text{ et } b \leq b'$$

les tétraèdres obtenus sont orientés canoniquement avec cet ordre.]

On définit alors :  $F : C(X) \rightarrow C(Y)$  de degré -1  
 $n$ -simplexe  $\mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i F_0(\sigma \times \text{id}) \circ \tau_i$

$$\text{où } \Delta^{n+1} \xrightarrow{\tau_i} \Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times \text{id}} X \times I \xrightarrow{F} Y$$

et l'on constate que ce morphisme de chaînes vérifie

$$\partial F + F \partial = g - f$$

d'où la définition :

Définition : Si  $f, g: C \rightarrow D$  sont 2 morphismes de chaînes, on dit que  $f$  et  $g$  sont homotopes ("chain homotopic") s'il existe un morphisme de chaînes  $F: C \rightarrow D$  de degré  $+1$  tel que  $F \partial + \partial F = g - f$ , ie tel que le diag. suivant soit commutatif pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{F_n} & D_{n+1} \\ \partial_n \downarrow & \searrow \beta_n & \downarrow \partial_{n+1} \\ & g_n & \\ C_{n-1} & \xrightarrow{F_{n-1}} & D_n \end{array} \quad F = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

On note  $f \sim g$ , et l'on dit que  $F$  est une homotopie de  $f$  à  $g$ .

L'axiome d'homotopie (A2) provient alors des 2 lemmes :

Lemme 1 : Si  $f, g: X \rightarrow Y$  sont 2 applications continues homotopes, alors les morphismes de chaînes correspondants  $f_*, g_*: C(X) \rightarrow C(Y)$  sont chain homotopes.

Lemme 2 : Si  $f, g: C \rightarrow D$  sont 2 morphismes de chaînes chain homotopes, alors  $f_* = g_*: H(C) \rightarrow H(D)$ .

Le lemme 1 provient de la construction de la définition "est chain homotopic" ci-dessus, tandis que le lemme 2 se montre directement :

Si  $f \sim g$ , il existe un morphisme de chaînes  $F$  de degré  $+1$  tel que

$$\partial F + F \partial = g - f$$

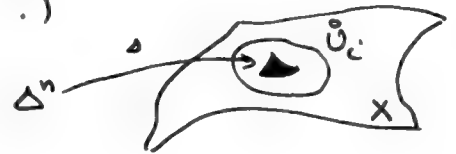
Soit  $z \in Z_n(C)$ . On a  $(g - f)z = F \partial z + \partial Fz = \partial Fz \in B_n(D)$

donc  $gz - f(z) \in B_n(D)$  et  $f_*(z) \stackrel{=0}{=} \beta z = \dot{g}z = g_*(z)$  pour tout  $z \in H_n(C)$ .



### 3° Axiome d'excision (A3)

Soient  $X$  un espace topologique,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement quelconque de  $X$  tel que  $\mathcal{U} \div \{\tilde{U}_i\}_{i \in I}$  soit un recouvrement d'ouverts de  $X$ .  
Un simplexe est dit petit d'ordre  $\mathcal{U}$  si il existe  $U_i \in \mathcal{U}$  tel que  
$$\Delta(\Delta^n) \subset \tilde{U}_i \quad (\bullet \xrightarrow{\Delta} \Delta^n \rightarrow X)$$



Notons :

$S^{\mathcal{U}}(X) = \bigoplus S_n^{\mathcal{U}}(X)$  l'ensemble des simplexes  
petits d'ordre  $\mathcal{U}$

$C^{\mathcal{U}}(X) = R^{(S^{\mathcal{U}}(X))}$  le complexe de chaînes petits d'ordre  $\mathcal{U}$  construit à  
partir de  $S^{\mathcal{U}}(X)$ . Si  $\sigma \in S^{\mathcal{U}}(X)$ ,  $\partial_i \sigma \in S^{\mathcal{U}}(X)$  où  $\partial_i$   
est l'opérateur "i-ième face".

Alors  $C^{\mathcal{U}}(X)$  est un sous-complexe du complexe  $C(X)$  de chaînes singulières  
et :

Théorème des chaînes petites d'ordre  $\mathcal{U}$  : (cf Spanier, Th 14 p 178)  
l'injection canonique  $i : C^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C(X)$  est une équivalence de  
chaînes, donc induit un isomorphisme des modules d'homologie :

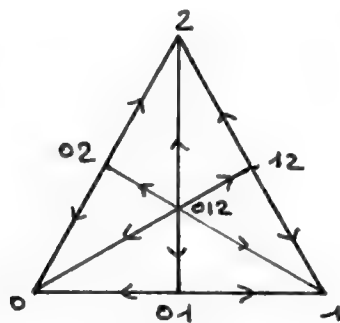
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n(X) \cong H_n^{\mathcal{U}}(X)$$

On peut donc calculer l'homologie  $H(X)$  d'un espace topologique en  
considérant seulement les simplexes petits d'ordre  $\mathcal{U}$ .

NB : "  $i : C^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C(X)$  est une équivalence de chaîne " signifie qu'il  
existe une déformation-rétraction  $r : C(X) \rightarrow C^{\mathcal{U}}(X)$ , ie un morphisme  
de chaînes  $r : C(X) \rightarrow C^{\mathcal{U}}(X)$  tel que :

$$r \circ i = \text{id}_{C^{\mathcal{U}}(X)} \quad \text{et} \quad i \circ r \sim \text{id}_{C(X)}$$

preuve : on peut utiliser la subdivision barycentrique (cf. Singer) : En dimension  
2, étant donné le 2-simplexe  $(0,1,2)$  on construit 6 simplexes en  
construisant tous les centres de gravité de  $\{0,1,2\}$ , simplexes que l'on oriente  
en partant du c.d.g. du simplexe  $(0,1,2)$  et en allant toujours vers un  
c.d.g. des extrémités (orientation centrifuge). On obtient :



Dans le cas général, on définit  $S : C(X) \rightarrow C(X)$  en posant pour tout  
 $n$ -simplexe  $\sigma$  : 
$$S(\sigma) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} E(\sigma) \Delta \sigma \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} \gamma_n : \Delta^n &\longrightarrow \Delta^n \\ 0 &\longmapsto 012\dots n \\ 1 &\longmapsto 01\dots \widehat{\sigma(0)} \dots n \\ 2 &\longmapsto 01\dots \widehat{\sigma(0)} \widehat{\sigma(1)} \dots n \\ &\dots\dots\dots \\ n &\longmapsto \sigma(n) \end{aligned}$$

abus: on veut-entend

$$S: C(X) \longrightarrow C(X) \text{ (car } C^n(X) \subset C(X))$$

En prenant suffisamment de subdivisions, on a  $S: C(X) \longrightarrow C^n(X) \subset C(X)$  et l'on montre que:

Lemme (cf. Th. des modèles acycliques, Spanier) (cf III, L14 à L16)

$S$  est un morphisme de chaînes homotope à l'identité.

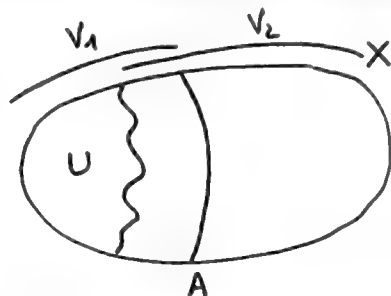
Ainsi  $S_*: H_n(C(X)) = H_n(X) \longrightarrow H_n(C(X))$  est un isomorphisme, et même  $S_* = \text{id}_{H_n(X)}$

CQFD

$$[\delta] \longmapsto [S(\delta)]$$

$$\text{donc } [S(\delta)] = [\delta] \quad \forall \delta \in S_n(X)$$

Montrons l'axiome d'excision (A3): Nous sommes dans la situation:



$$\bar{U} \subset \hat{A}$$

et il faut montrer que  $H_*(X \cup U, A \cup U) \longrightarrow H_*(X, A)$  est un isomorphisme.

Soit le recouvrement  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$  défini par  $V_1 = A$  et  $V_2 = X \setminus U$ .

On a:  $\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{A} \\ \dot{V}_2 = X \setminus \bar{U} \end{cases}$  donc  $\dot{\mathcal{V}}$  est encore un recouvrement de  $X$  d'après  $\bar{U} \subset \hat{A}$ .

On a:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n(A \cup U) = S_n(X \setminus U) \cap S_n(A) \\ S_n^{\mathcal{V}}(X) = S_n(X \setminus U) \cup S_n(A) \\ S_n^{\mathcal{V}}(A) = S_n(A) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_n(A \cup U) = C_n(X \setminus U) \cap C_n(A) \\ C_n^{\mathcal{V}}(X) = C_n(X \setminus U) + C_n(A) \\ C_n^{\mathcal{V}}(A) = C_n(A) \end{array} \right.$$

donc:

$$C_*(X \cup U, A \cup U) \doteq \frac{C_*(X \cup U)}{C_*(A \cup U)} = \frac{C_*(X \cup U)}{C_*(X \cup U) \cap C_n(A)}$$

$$\simeq \frac{C_*(X \cup U) + C_*(A)}{C_*(A)} \quad \text{d'après}$$

l'isomorphisme de Noether (si  $A$  et  $B$  sont des  $R$ -modules, alors  $\frac{B}{A \cap B} \simeq \frac{A+B}{A}$ . exercice: montrer cet isomorphisme en utilisant le lemme du serpent)

Ainsi :  $C_*(X \setminus U, A \setminus U) \simeq \frac{C^v(X)}{C^v(A)} \xrightarrow{\alpha} \frac{C_*(X)}{C(A)}$   
(par passage au quotient)

On obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^v(A) & \longrightarrow & C^v(X) & \longrightarrow & \frac{C^v(X)}{C^v(A)} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel \text{id}_{C(A)} & & \downarrow i & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

$\text{id}_{C(A)}$  induit un isomorphisme entre les  $R$ -modules d'homologie, et d'après le théorème des chaînes petites,  $i : C^v(X) \hookrightarrow C(X)$  induit aussi un isomorphisme en homologie, donc  $\alpha$  induit un isomorphisme en homologie (cf. lemme ci-dessous) et par suite :

$$H_*(X, A) \simeq H_*\left(\frac{C^v(X)}{C^v(A)}\right) \simeq H_*(X \setminus U, A \setminus U) \quad \text{d'où le résultat.}$$

lemme : (lemme des 5) :

Soit le diagramme de complexes de chaînes dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Si 2 applications parmi  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  induisent des isomorphismes en homologie (ie. sont des "quasi-isomorphismes"), il en est de même de la troisième.

preuve : on écrit les suites exactes d'homologie longues :

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(C) & \longrightarrow & H_n(D) & \longrightarrow & H_n(E) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(D) \\ \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* \\ \text{suffit} & H_n(C') & \longrightarrow & H_n(D') & \longrightarrow & H_n(E') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & H_{n-1}(D') \end{array}$$

et le lemme des 5 (version classique) montre que  $\gamma_*$  est aussi un isomorphisme.

□□□

Conclusion : L'homologie singulière vérifie bien les 4 axiomes de la théorie de l'homologie.

#### 4° Application

Voici une application directe du théorème des chaînes petites d'ordre  $\mathcal{U}$  :

##### Proposition (Suite exacte de Mayer-Vietoris)

Si  $X$  est un espace topologique et si  $X = A \cup B = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ , notons les injections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{i} & A \\ & \searrow j & \nearrow p \\ & B & \xrightarrow{q} A \cup B \end{array}$$

On a la suite exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_* \\ j_* \end{pmatrix}} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{(p_*, -q_*)} H_n(A \cup B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

preuve : on a bien  $(p_*, -q_*) \begin{pmatrix} i_* \\ j_* \end{pmatrix} = p_* i_* - q_* j_* = (pi)_* - (qj)_* = 0$  car  $pi = qj$ .

D'autre part, on a  $S(A) \cap S(B) = S(A \cap B)$ . En passant aux  $R$ -modules libres engendrés, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow C(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}} C(A) \oplus C(B) \xrightarrow{(p, -q)} C(A) + C(B) \longrightarrow 0 \quad (1)$$

Cette suite est exacte car  $C(A) \cap C(B) = C(A \cap B)$  (car (1) est un résultat général : si  $X = E \cup F$  où  $E$  et  $F$  sont 2 ensembles et si  $R^{(X)}$  désigne le  $R$ -module libre engendré par  $X$ , on a la suite exacte de

$$R\text{-modules : } 0 \longrightarrow R^{(E \cap F)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}} R^{(E)} \oplus R^{(F)} \xrightarrow{(p, -q)} R^{(E)} + R^{(F)} \longrightarrow 0$$

car  $R^{(E)} \cap R^{(F)} = R^{(E \cap F)}$ )

$$\text{Or } C(A) + C(B) = C^{\mathcal{V}}(X) \quad \text{où } \mathcal{V} = \{A, B\} \quad \left( \begin{array}{l} \text{car} \\ S_n^{\mathcal{V}}(X) = S_n(A) \cup S_n(B) \\ \text{(cf. L9 vers } \S) \end{array} \right)$$

et  $C^{\mathcal{V}}(X) \simeq C(X)$  d'après le théorème des chaînes petites d'ordre  $\mathcal{V} = \{A, B\}$ , donc, en écrivant la suite exacte longue d'homologie associée à la suite (1), on obtient :

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_* \\ j_* \end{pmatrix}} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{(p_*, -q_*)} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

$C \cap F \cap$

Remarques : on peut montrer la suite de Mayer-Vietoris seulement à partir des axiomes de l'homologie.

exercice : Utiliser Mayer-Vietoris pour calculer  $H_n(S^p)$  (ind : considérer 2 hémisphères de  $S^p$ ).

### Suite de Mayer-Vietoris (2<sup>e</sup> version)

Une triade est un triplet  $(X, A, B)$  d'e.t tels que  $A \subset X$  et  $B \subset X$ . On dit qu'une triade est exacte (ou encore propre) si les 2 inclusions:

$$(A, A \cap B) \hookrightarrow (A \cup B, B)$$

$$(B, A \cap B) \hookrightarrow (A \cup B, A)$$

sont des excisions, ie si  $H_n(A, A \cap B) \simeq H_n(A \cup B, B)$  et  $H_n(B, A \cap B) \simeq H_n(A \cup B, A)$ .  
(On a exciser respectivement  $B \setminus (A \cap B)$  et  $A \setminus (A \cap B)$  de  $A \cup B$ )

#### Théorème 1: (Suite exacte de Mayer-Vietoris)

Si  $(X, A, B)$  est une triade exacte et si  $X = A \cup B$ , on a la suite exacte de MV:

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

#### Théorème 2: (Suite relative de Mayer-Vietoris)

Si  $(X, A, B)$  est une triade exacte, on a la suite exacte relative de MV:

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_n(X, A \cap B) \xrightarrow{\partial} H_n(X, A) \oplus H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A \cup B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X, A \cap B) \rightarrow \dots$$

(preuves: cf Greenberg, Lect. on alg. top. §15 p72)



Proposition: (Brouwer 1920~1930)

- (a)  $S^m$  a le même type d'homotopie que  $S^n$  si  $m=n$ .  
 (b)  $\mathbb{R}^m$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  si  $m=n$ .  
 (c) (Théorème du point fixe de Brouwer) Si  $U$  est un ouvert convexe relativement compact de  $\mathbb{R}^n$ , toute application continue de  $\bar{U}$  dans  $\bar{U}$  admet au moins un point fixe.

preuve:

- (a) Si  $S^m$  est homéomorphe à  $S^n$ , d'après l'axiome d'invariance homotopique (A2)

$$\text{on a: } H_k(S^m) \cong H_k(S^n) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

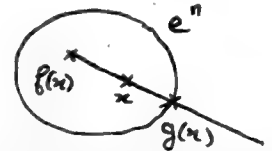
$$\text{Comme } \begin{cases} H_k(S^n) = 0 & \text{si } k \neq 0 \text{ et } k \neq n \\ H_k(S^n) = \mathbb{R} & \text{si } k=0 \text{ ou } k=n \end{cases} \quad (\text{où } n > 0)$$

on obtient nécessairement  $m=n$

- (b) Si  $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ ,  $S^m \cong \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^n$  et le (a) implique  $m=n$ .  
 L'homotopie généralise ici l'argument de connexité utilisé pour montrer que  $\mathbb{R}^2$  ne peut pas être homéomorphe à  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est connexe alors que  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ne l'est pas)

NB: Il existe cependant des bijections de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ , et des surjections de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  appelées courbes de Peano.

- (c) Soit  $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$ . Si  $g: e^n \rightarrow e^n$  n'a pas de point fixe, la demi-droite  $[f(n), x)$  coupe  $S^{n-1} = \partial e^n$  en un point  $g(n)$ . On montre facilement



que  $g$  ainsi définie est continue et vérifie  $g(n) = x$  pour tout  $x \in \partial e^n$ .  $g$  est donc une déformation-rétraction de  $e^n$  sur la sphère  $S^{n-1}$ , donc

$H_{n-1}(e^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1})$ , mais  $H_{n-1}(e^n) = 0$  si  $n \geq 2$  et  $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$  ce qui est absurde.

CQFD

Remarque: Un polyèdre est une réunion finie de simplexes. C'est donc un e.t. compact. Toute variété différentielle est triangularisable, de sorte que toute variété différentielle compacte soit un polyèdre.

Si  $f: X \rightarrow X$  est une application continue,  $f$  induit des homomorphismes  $f_n: H_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$  et  $f_*: H_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z})$ .

Définissons la trace de  $f$  par:  $\text{tr } f \doteq \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{tr } f_n$ , où  $\text{tr } f_n$  désigne la trace de la matrice qui représente  $f_n: H_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$  lorsqu'on n'a pas tenu compte de la Torsion de  $H_n(X; \mathbb{Z})$  (ie lorsqu'on a écrit  $H_n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k \oplus \text{Torsion}$  et considéré  $f_n: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^k$ ). On peut alors énoncer la généralisation suivante du Théorème de Brouwer:

Théorème du point fixe de Lefschetz: Soit  $X$  un polyèdre et  $f: X \rightarrow X$  une application continue. Si  $\text{tr} f \neq 0$ , alors  $f$  possède au moins un point fixe.

\* Ce théorème généralise le th. de Brouwer car si  $X = \mathbb{S}^n$ , l'homologie de  $X$  est triviale (ie. c'est l'homologie d'un point)

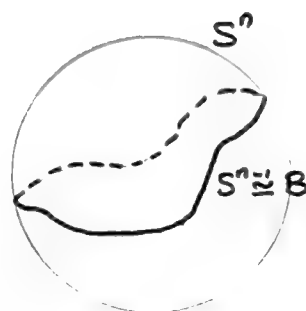
$H_0(X) = \mathbb{Z}$  et  $H_n(X) = 0$  si  $n > 0$   
de plus  $f_n = \text{id}_{H_n(X)}$  donc  $\text{tr} f = 1 \neq 0$ .

\* Si  $f: S^n \rightarrow S^n$  est un morphisme de classe  $C^\infty$  entre les 2 variétés diff.  $S^n$ , on montre que  $\text{tr} f = 1 + (-1)^n \deg f$  (où  $\deg f$  est le degré de l'application  $f$ , cf Théorie de Morse)

### Théorème de Jordan:

Soit  $S^{n-1} \hookrightarrow B \subset S^n$  un plongement topologique de  $S^{n-1}$  dans  $S^n$ .

Alors  $S^n \setminus B = U \cup V$  où  $U$  et  $V$  sont 2 ouverts connexes disjoints de bord  $\partial U = \partial V = B$ .



preuve:

1) Montrons que si  $A \cong \mathbb{I}^k$  où  $k \leq n$ , et  $A \subset S^n$ , alors  $\tilde{H}_*(S^n \setminus A) = 0$ .

Récurrence sur  $k$ :

\* Si  $k=0$ ,  $A \cong *$  ( $*$  = un point)  
et  $\tilde{H}_*(S^n \setminus *) = \tilde{H}_*(\mathbb{R}^n) = 0$

\* Supposons l'assertion vraie aux rangs  $\leq k-1$ , et montrons la au rang  $k$ . Soit  $A \cong \mathbb{I}^k$  et  $A \subset S^n$ .

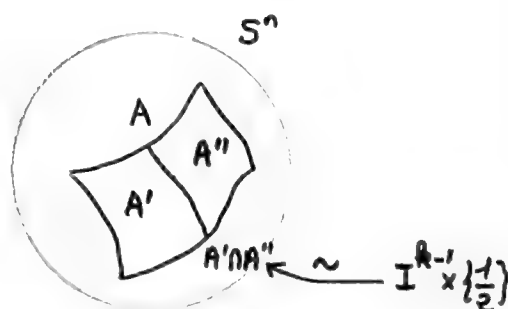
$A$  est homéomorphe à la réunion de 2 cubes

$A' \cup A''$ , et la suite exacte de Mayer-Vietoris écrite pour  $S^n \setminus A'$  et  $S^n \setminus A''$  donne, compte tenu des égalités:

$$(S^n \setminus A') \cap (S^n \setminus A'') = S^n \setminus A$$

$$(S^n \setminus A') \cup (S^n \setminus A'') = S^n \setminus (A' \cap A'')$$

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_i(S^n \setminus A) \rightarrow H_i(S^n \setminus A') \oplus H_i(S^n \setminus A'') \rightarrow H_i(S^n \setminus (A' \cap A'')) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(S^n \setminus A) \downarrow \dots$$



On a encore la même suite exacte en passant de partout à l'homologie réduite. Comme  $A' \cap A''$  est homéomorphe à un cube de dimension  $k-1$ , l'hypothèse de récurrence donne

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus (A' \cap A'')) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n$$

d'où :

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(S^n \setminus A') \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus A'')$$

S'il existait  $i \in [0, n]$  tel que  $\tilde{H}_i(S^n \setminus A) \neq 0$ , alors un des 2 termes de la somme  $\tilde{H}_i(S^n \setminus A') \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus A'')$  ne serait pas nul. Par exemple  $\tilde{H}_n(S^n \setminus A')$ . On recommence alors le raisonnement précédent, et on continue par dichotomie.

On obtient une suite décroissante d'ensembles  $\{A_j\}_{j \geq 0}$  tous homéomorphes au cube  $I^k$  et tels que  $\tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) \neq 0$ .

On a  $\tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) \subset \tilde{H}_i(S^n \setminus A_{j+1})$ , et en passant à la limite inductive pour  $j \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\varinjlim_j \tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) \neq 0$$

Mais un raisonnement direct montre que  $\varinjlim_j \tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) = \tilde{H}_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j)$

En effet, un cycle  $z$  qui représente une classe d'homologie de  $H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j)$  n'intercepte jamais le compact  $\bigcap_{j \geq 0} A_j$ , de sorte qu'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $\bigcap_{j \geq 0} A_j$  qui ne rencontre pas ce cycle  $z$ .  $z$  ne rencontre donc jamais

$\bigcap_{j \geq 0} A_j = A_N$  pour  $N \geq N_0$  ( $N_0$  fixé), ie  $z$  est un cycle qui représente une classe d'homologie de  $H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j) = H_i(S^n \setminus A_N)$  pour  $N \geq N_0$ , donc représente un cycle de  $\varinjlim_j H_i(S^n \setminus A_j)$ .

L'inclusion réciproque  $\varinjlim_j H_i(S^n \setminus A_j) \subset H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j)$  provient de  $H_i(S^n \setminus A_j) \subset H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j)$  ( $\forall j$ ).

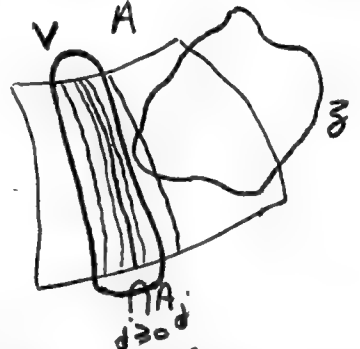
Mais alors :

$$H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j) = 0 \quad \forall i \leq n$$

par l'yp de récurrence, puisque  $\bigcap_{j \geq 0} A_j \simeq$  cube de dimension  $\leq k-1$  ( $\forall N$ )

puisque  $H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j) \subset H_i(S^n \setminus A_0 \cap A_1) = 0$  par hypothèse de récurrence, puisque  $A_0 \cap A_1 \simeq I^{k-1}$ .

D'où l'absurdité.



$i \in \mathbb{R}, x$   
 $(x, y) \mapsto H_i(x)$   
 injective  
 ?

car  $H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j) = 0$   
 et  $H_i(S^n \setminus A_j) \neq 0$   
 d'où l'absurdité.

2) Montrons que si  $S^k \cong B \subset S^n$ , où  $k \leq n$ , alors :

$$\begin{cases} \tilde{H}_i(S^n \setminus B) = 0 & \text{si } i \neq n-k-1 \\ \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus B) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si c'est vrai, pour  $B \cong S^{n-1}$  on obtient :  $\tilde{H}_0(S^n \setminus B) = \mathbb{Z}$   
donc  $H_0(S^n \setminus B) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ie  $S^n \setminus B$  possède 2 composantes  
connexes.

Procédons par récurrence sur  $k$ .

\* Si  $k=0$ ,  $\tilde{H}_*(S^n \setminus \{x_0, x_1\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \neq n-1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } * = n-1 \end{cases}$

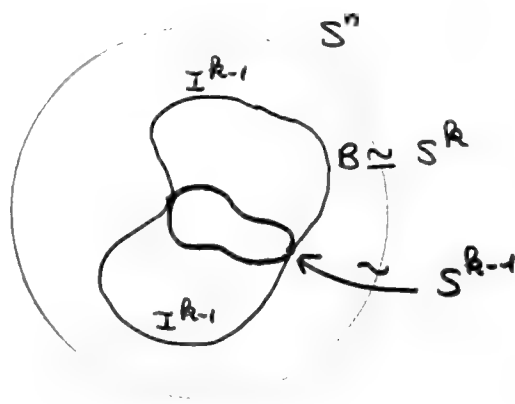
puisque  $S^n \setminus \{x_0, x_1\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  qui a le même type d'homotopie  
que  $S^{n-1}$ .

\* Si la propriété 2) est vraie pour tous les rangs  $\leq k-1$ , montrons  
la au rang  $k$ .

Notons  $B_+$ ,  $B_-$  et  $E$  les images  
respectives de l'hémisphère nord  
 $\{\|x\|=1 \text{ et } x_{k+1} \geq 0\}$  de  $S^k$ ,  
de l'hémisphère sud  $\{\|x\|=1 \text{ et } x_{k+1} \leq 0\}$   
de  $S^k$  et de l'équateur  $S^{k-1}$  de  $S^k$   
par le plongement  $S^k \cong B \subset S^n$ .

On a :

$$\begin{cases} B_+ \cup B_- = B \cong S^k \\ B_+ \cap B_- = E \cong S^{k-1} \end{cases}$$



La suite de Mayer-Vietoris pour  $(S^n \setminus B_+) \cap (S^n \setminus B_-) = S^n \setminus B$   
et  $(S^n \setminus B_+) \cup (S^n \setminus B_-) = S^n \setminus E$

donne :

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_i(S^n \setminus B) \rightarrow H_i(S^n \setminus B_+) \oplus H_i(S^n \setminus B_-) \rightarrow H_i(S^n \setminus E) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(S^n \setminus B) \rightarrow \dots$$

On a  $B_+ \cong B_- \cong \mathbb{R}^k$ , de sorte que le \* 1) donne :

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus B_-) \cong \tilde{H}_i(S^n \setminus B_+) \cong 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n.$$

L'hypothèse de récurrence donne, puisque  $E \cong S^{k-1}$  :

$$\begin{cases} \tilde{H}_i(S^n \setminus E) = 0 & \text{si } i \neq n-k \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus E) = \mathbb{Z} & \text{si } i = n-k \end{cases}$$

Si  $i \neq n-k-1$ , on a :  $0 \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus B) \rightarrow 0$  donc  $\tilde{H}_i(S^n \setminus B) = 0$

Si  $i = n-k-1$ , on obtient :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(S^n \setminus B) \rightarrow 0 \text{ donc } \tilde{H}_i(S^n \setminus B) = \mathbb{Z}$$

ce qui prouve le 2).

3) On a montré que  $S^n \setminus B = U \cup V$  où  $U$  et  $V$  sont 2 ouverts connexes<sup>(\*)</sup> disjoints. Il faut encore vérifier que  $\partial U = \partial V = B$ .

$$\left. \begin{array}{l} U \text{ ouvert donc } \partial U \subset \{U\} \\ V \text{ ouvert donc } \partial V \cap U = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \partial U \subset B$$

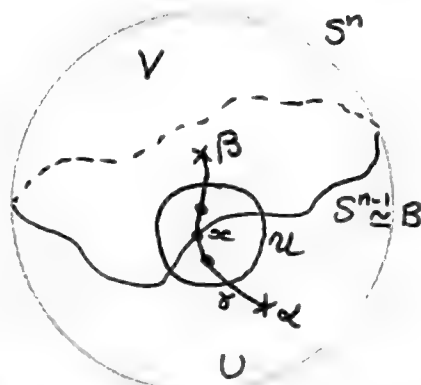
Montrons que  $B \subset \partial U$  : soit  $x \in B$ .

Le 1) donne :

$$\tilde{H}_0(S^n \setminus (B \setminus \{x\})) = 0$$

donc  $S^n \setminus (B \setminus \{x\})$  est connexe, en fait connexe par arcs.

Si  $\alpha \in U$  et  $\beta \in V$ , soit  $\gamma$  un chemin de  $S^n \setminus (B \setminus \{x\})$  d'origine  $\alpha$  et d'extrémité  $\beta$ .  $\gamma$  passe nécessairement par  $x$ , de sorte que tout voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $x$  dans  $S^n$  rencontre un point de  $\gamma \cap U$  et un point de  $\gamma \cap V$ .



CPFD

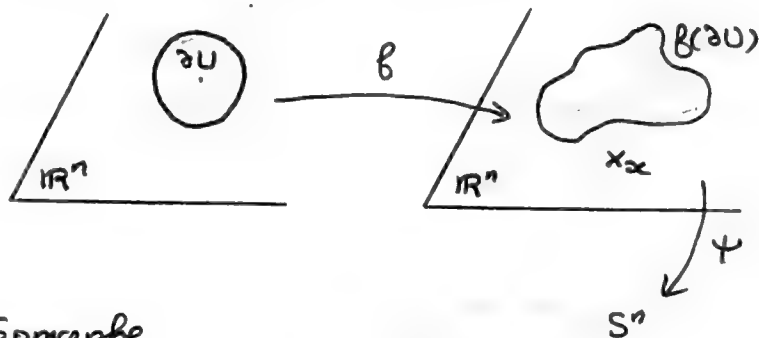
(\*) Les composantes connexes d'un ouvert d'un e.t. sont des ouverts)

Corollaire : Toute bijection continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme.

NB : C'est une généralisation d'un résultat admis en terminale ("toute application strictement monotone et continue sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est une bijection sur son image, et d'inverse continue")

preuve : Montrons que toute bijection continue  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est ouverte.

Soit  $U$  une boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{U}$  son adhérence et  $\partial U \cong S^{n-1}$  son bord.



Si  $x \notin f(\bar{U})$ ,  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$  est homéomorphe à  $S^n$ . En notant  $\psi: \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \rightarrow S^n$  cet homéomorphisme,  $\psi \circ f(\partial U) \doteq B$  est inclus dans  $S^n$  et homéomorphe à  $S^{n-1}$  (car  $f(\bar{U})$  est homéomorphe à une boule fermée de  $\mathbb{R}^n$ )





Ainsi  $S^n \setminus B = \mathcal{U}' \cup \mathcal{V}'$  est la réunion de 2 ouverts connexes disjoints qui correspondent, par l'homéomorphisme  $\gamma$ , à 2 ouverts connexes disjoints de  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ , notés  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ , ie :

$$(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \setminus \beta(\partial U) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

Comme  $x \notin \beta(\bar{U})$ , on peut écrire :

$$\mathbb{R}^n \setminus \beta(\partial U) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \quad (\text{en intégrant } x \text{ dans } \mathcal{U} \text{ (ou } \mathcal{V}))$$

L'application continue  $\beta: \mathbb{R}^n \setminus \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \beta(\partial U)$  transforme les composantes connexes de  $\mathbb{R}^n \setminus \partial U$ , à savoir  $U$  et  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$ , dans les composantes connexes de  $\mathbb{R}^n \setminus \beta(\partial U)$ , à savoir  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ ,

Donc  $\beta(U) \subset \mathcal{U}$ , par exemple. Comme  $\beta$  est bijective, on aura nécessairement  $\beta(U) = \mathcal{U}$  qui est ouvert !

(si  $\beta(U) \subsetneq \mathcal{U}$ ,  $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} / \beta(v) \in \mathcal{U}$ , ce qui est absurde car cela impliquerait que  $\beta(v) \in \mathcal{U}$  puisqu'on ne peut pas avoir en même temps  $\beta(v) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$  et  $\beta(v) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$  )

CPFD

### III Le Théorème des modèles acycliques

Ce théorème est souvent utilisé :

\* Dans la méthode de subdivisions barycentrique, pour montrer que l'application  $C_*(X) \rightarrow C_*(X)$  était une équivalence

$$\sigma \mapsto \sum \epsilon(\sigma) S_\sigma \circ \sigma$$

de chaînes.

(Rappel : un morphisme de chaînes  $\tau: C \rightarrow C'$  est une équivalence de chaînes ssi il existe un morphisme de chaîne  $\eta: C' \rightarrow C$  tel que  $\tau \circ \eta$  et  $\eta \circ \tau$  soient homotopes, comme complexes de chaînes, respectivement à  $\text{id}_C$  et à  $\text{id}_{C'}$ .)

\* Pour montrer le théorème d'Eilenberg - Zilber qui affirme qu'il existe une équivalence de chaînes  $C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightarrow{cv} C_*(X \times Y)$

\* Pour montrer l'existence d'une équivalence de chaînes entre  $\square_*(X) \xrightarrow{cv} C_*(X)$ , où  $\square_*(X)$  désigne le complexe de chaînes obtenue à partir de l'e.t.  $X$  en remplaçant les simplexes singuliers par des cubes singuliers.

#### Définitions :

Un  $R$ -module  $X$  est projectif si pour tout morphisme  $f: X \rightarrow B$  et pour toute suite exacte de  $R$ -modules  $A \xrightarrow{g} B \rightarrow 0$  il existe un morphisme  $h: X \rightarrow A$  tel que  $g \circ h = f$

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \nearrow f & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{g} & B \rightarrow 0 \end{array}$$

Un complexe de chaînes positif :

$P_*: \dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow 0$  est dit projectif (resp. acyclique) si tous les  $R$ -modules  $P_n$  sont projectifs (resp. si  $H_n(P_*) = 0$  dès que  $n > 0$ )

exercices : a) Tout  $R$ -module libre est projectif

b) Soit  $d$  un diviseur de  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module projectif ssi  $\Delta(d, \frac{n}{d}) = 1$ .

Lemme : Soient  $P_*$  un complexe projectif positif de  $R$ -modules,  $Q_*$  un complexe acyclique positif de  $R$ -modules et  $\varphi: H_0(P_*) \rightarrow H_0(Q_*)$  un homomorphisme de groupes.

Alors il existe un morphisme de chaînes  $f: P_* \rightarrow Q_*$  tel que  $H_0(f) = \varphi$ , et de plus  $f$  est unique à homotopie de chaînes près.

preuve :

Existence : Il faut compléter les barreaux de l'échelle :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{p} & H_0(P_*) = P_0 / \partial P_1 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow b_1 & \searrow \beta_0 \circ \partial_1 & \downarrow \beta_0 & \searrow \varphi_0 \circ p & \downarrow \varphi \text{ donné} \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_2} & Q_1 & \xrightarrow{\partial_1} & Q_0 & \xrightarrow{q} & H_0(Q_*) = Q_0 / \partial Q_1 \rightarrow 0
 \end{array}$$

$\varphi$  est donné et  $\varphi \circ p : P_0 \rightarrow H_0(Q_*)$ . Comme  $q$  est surjectif et  $P_0$  projectif, il existe  $\beta_0 : P_0 \rightarrow Q_0$ ,  $R$ -morphisme, tel que  $\varphi \circ p = q \circ \beta_0$ .

Ainsi  $\beta_0 \circ \partial_1 : P_1 \rightarrow Q_0$ , et on a  $\text{Im}(\beta_0 \circ \partial_1) \subset \partial_1 Q_1$  (car si  $z \in P_1$ ,  $q[\beta_0 \circ \partial_1(z)] = \varphi \circ p \circ \partial_1(z) = 0$  donc  $\beta_0 \circ \partial_1(z) \in \text{Ker } q = \partial_1 Q_1$ ). On peut encore conclure :  $\beta_0 \circ \partial_1$  arrive dans  $\partial_1 Q_1$  et  $P_1$  est projectif, donc il existe  $\beta_1 : P_1 \rightarrow Q_1$  tel que  $\beta_0 \circ \partial_1 = \partial_1 \circ \beta_1$ .

Réurrence sur  $k$  : Pour  $k > 1$ , on aura la situation :

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_k & \xrightarrow{\partial_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & P_{k-2} & \rightarrow & P_{k-3} \rightarrow \dots \\
 \downarrow b_k & \searrow \beta_{k-1} \circ \partial_k & \downarrow \beta_{k-1} & & \downarrow \beta_{k-2} & & \downarrow \\
 Q_k & \xrightarrow{\partial_k} & Q_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & Q_{k-2} & \rightarrow & Q_{k-3} \rightarrow \dots
 \end{array}$$

$\text{Im}(\beta_{k-1} \circ \partial_k) \subset \partial_k Q_k$  puisque si  $z \in P_k$ , on a

$$\partial_{k-1}(\beta_{k-1} \circ \partial_k(z)) = \beta_{k-2} \circ \partial_{k-1} \circ \partial_k(z) = 0$$

donc  $\beta_{k-1} \circ \partial_k(z) \in \text{Ker } \partial_{k-1} = \text{Im } \partial_k$   
(cf  $H_{k-1}(Q_*) = 0$ )

$P_k$  est projectif, et  $\beta_{k-1} \circ \partial_k : P_k \rightarrow \partial_k Q_k$  donc il existe un morphisme  $\beta_k : P_k \rightarrow Q_k$  qui rend le triangle commutatif :

$$\beta_{k-1} \circ \partial_k = \partial_k \circ \beta_k$$

$\beta = \{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est parfaitement construit et commute avec les différentielles  $\partial_k$ , c'est donc un morphisme de chaînes. Il vérifie  $H_0(\beta) = \varphi$  par construction.

Unicité : Si  $f' : P_* \rightarrow Q_*$  est un autre morphisme de chaînes qui vérifie la même condition que  $f$ ,  $f' - f$  vérifie  $H_0(f' - f) = 0$ . Tout revient donc à montrer que si  $f : P_* \rightarrow Q_*$  vérifie  $H_0(f) = 0$ , alors  $f$  est "chain-homotopic" à l'application nulle 0.

Il faut construire une homotopie  $H = \{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $H_n : P_n \rightarrow Q_{n+1}$ , qui vérifie :  $\partial_{n+1} H_n + H_{n-1} \partial_n = f_n \quad \forall n \geq 0$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{f} & H_0(P_*) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \beta_2 & \swarrow H_1 & \downarrow \beta_1 & \swarrow H_0 & \downarrow \beta_0 & & \downarrow 0 = H_0(f) \\ \rightarrow & Q_2 & \xrightarrow{\partial_2} & Q_1 & \xrightarrow{\partial_1} & Q_0 & \xrightarrow{g} & H_0(Q_*) & \rightarrow 0 \end{array}$$

$\forall z \in P_0 \quad g \circ f_0(z) = 0$  donc  $f_0(z) \in \text{Ker } g = \partial_1 Q_1$ .  
Ainsi  $f_0 : P_0 \rightarrow \partial_1 Q_1$ . Comme  $P_0$  est projectif, il existe  $H_0 : P_0 \rightarrow Q_1$  telle que  $f_0 = \partial_1 H_0$ .

Considérons maintenant  $f_1 - H_0 \partial_1 : P_1 \rightarrow Q_1$

$\forall z \in P_1 \quad \partial_1(f_1(z) - H_0 \partial_1(z)) = \partial_1 f_1(z) - \partial_1 H_0 \partial_1(z) = \partial_1 f_1(z) - f_0 \partial_1(z) = 0$  car  $f$  est un morphisme de chaînes. Donc  $(f_1 - H_0 \partial_1)(z) \in \text{Im } \partial_2 = \text{Ker } \partial_1$  car  $Q_*$  est acyclique, et comme  $P_1$  est projectif, on a l'existence de  $H_1 : P_1 \rightarrow Q_2$  tel que  $\partial_2 H_1 = f_1 - H_0 \partial_1$ .

On procède ainsi par récurrence pour construire  $H$  :

Si  $H_0, \dots, H_{k-1}$  sont déjà construits tels que  $\partial_{n+1} H_n + H_{n-1} \partial_n = f_n$ , construisons  $H_k$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & P_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & P_k & \xrightarrow{\partial_k} & P_{k-1} & \rightarrow \\ & \downarrow \beta_{k+1} & \swarrow H_k & \downarrow \beta_k & \swarrow H_{k-1} & \downarrow \beta_{k-1} \\ \rightarrow & Q_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & Q_k & \xrightarrow{\partial_k} & Q_{k-1} & \rightarrow \end{array}$$

$H_k$  doit vérifier  $\partial_{k+1} H_k = f_k - H_{k-1} \partial_k$ . Considérons donc l'application

$$f_k - H_{k-1} \partial_k : P_k \rightarrow Q_k$$

$$\forall z \in P_k \quad \partial_k(f_k(z) - H_{k-1} \partial_k(z)) = \partial_k f_k(z) - \partial_k H_{k-1} \partial_k(z)$$

$$\text{mais } \partial_k H_{k-1} = f_{k-1} - H_{k-2} \partial_{k-1} \text{ par hypothèse de récurrence,}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \partial_k(f_k(z) - H_k \partial_k(z)) &= \partial_k f_k(z) - f_{k-1} \partial_k(z) - H_{k-2} \partial_{k-1} \partial_k(z) \\ &= 0 \quad (\text{car } f \text{ est un morphisme de chaînes et } \partial_{k-1} \partial_k = 0) \end{aligned}$$

Donc  $\text{Im}(\beta_R - H_{R-1} \partial_R) \subset \text{Ker } \partial_R = \text{Im } \partial_{R+1}$ , car  $Q_R$  est acyclique.  
 Enfin, comme  $P_R$  est projectif, il existe  $H_R: P_R \rightarrow Q_{R+1}$  tel  
 que  $\partial_{R+1} H_R = \beta_R - H_{R-1} \partial_R$ , ce qui montre la récurrence.  
 CQFD

Un foncteur  $G: \underline{\text{Top}} \rightarrow \underline{R\text{-mod}}$  de la catégorie des e.t. dans celle des complexes de  $R$ -modules est dit libre sur les modèles  $\mathcal{M} = \{M\}_{M \in \mathcal{M}}$  (où les  $M$  désignent des e.t) si :

$$\forall M \in \mathcal{M} \quad \exists g_M \in G(M) \quad \forall X \text{ e.t.} \quad G(X) \simeq R^{(\{G(\beta)g_M\}_{\beta \in C^0(M,X)})}$$

Notons  $\underline{\text{Compl}^+ R\text{-mod}}$  la catégorie des complexes positifs de  $R$ -modules.  
 Un foncteur  $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}: \underline{\text{Top}} \rightarrow \underline{\text{Compl}^+ R\text{-mod}}$  est dit libre sur la famille de modèles  $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si chacune de ses composantes est libre sur les modèles  $M_n$  correspondants. Le foncteur  $G$  est dit acyclique sur  $\mathcal{M}$  si :

$$\forall M \in \mathcal{M} \quad G(M) \text{ est acyclique (ie } H_n(G(M)) = 0 \text{ pour } n > 0)$$

Théorème des modèles acycliques (cf. Spanier p164)

Soient  $G, G': \underline{\text{Top}} \rightarrow \underline{\text{Compl}^+ R\text{-mod}}$  qui vérifient :

- $\left\{ \begin{array}{l} G \text{ est libre de modèle } \mathcal{M} \\ G' \text{ est acyclique sur } \mathcal{M} \end{array} \right.$

Alors tout morphisme de foncteurs  $H_0(G) \rightarrow H_0(G')$  est induit par un morphisme de foncteurs  $G \rightarrow G'$  unique à homotopie près.

Rappel: (Morphisme de foncteurs) Soient  $F, G: \underline{\mathcal{R}} \rightarrow \underline{\mathcal{R}'}$  deux foncteurs covariants. On appelle morphisme de foncteurs de  $F$  dans  $G$  la donnée, pour chaque objet  $X \in \underline{\mathcal{R}}$ , d'un homomorphisme  $\beta_X: F(X) \rightarrow G(X)$  tel que pour tout  $X, Y \in \underline{\mathcal{R}}$  et pour tout  $u \in \text{Hom}(X, Y)$  le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(u)} & F(Y) \\ \beta_X \downarrow & & \downarrow \beta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(u)} & G(Y) \end{array}$$

Dans le cas du théorème, ~~se~~ un morphisme de foncteurs de  $G \rightarrow G'$  est donc une collection  $\{\beta_X\}_{X \in \text{e.t.}}$  de morphismes de chaînes  $\beta_X: G(X) \rightarrow G'(X)$  (qui commutent donc avec les différentielles) qui rend le diagramme ci-dessus commutatif. L'unicité "à homotopie près" signifie simplement que pour tout  $X$  e.t.,  $\beta_X$  est unique à une homotopie de chaînes près.

### Application :

1) Montrons l'existence d'une équivalence de chaînes entre  $C_*(X)$  et  $\square_*(X)$

Notons  $C_* = \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $\square_* = \{\square_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ) le foncteur qui à tout e.t.  $X$  associe son complexe de chaîne singulière  $C_*(X)$  (resp. son complexe de chaînes singulières  $\square_*(X)$  construit en utilisant des cubes au lieu des simplexes)

$C_n$  est un foncteur libre sur le modèle  $\mathcal{M} = \{\Delta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\Delta^n$  désigne le  $n$ -simplexe standard de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En effet, posons  $g_{\Delta^n} = \text{id}_{\Delta^n} \in C_n(\Delta^n)$   
 Alas : 
$$\forall X \text{ e.t. } C_n(X) \cong \mathbb{R}^{C^0(\Delta^n, X)} = \mathbb{R}^{(\{C_n(\sigma) g_{\Delta^n}\}_{\sigma \in C^0(\Delta^n, X)})}$$

De même,  $\square_n$  est libre de modèles  $\{I^n\}$ . Ainsi, les foncteurs  $C_*$  et  $\square_*$  sont libres de modèles  $\{\Delta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

$C_*(I^n)$  et  $\square_*(\Delta^n)$  sont acycliques car l'homologie d'un cube  $I^n$  ou d'un simplexe  $\Delta^n$  est celle du point, le cube ou le simplexe admettant toujours une déformation-rétraction sur 1 point.  
 On peut donc appliquer le théorème des modèles acycliques avec :

1) avec  $\begin{cases} C_* = \text{foncteur libre de modèle } \{\Delta^n\}_{n \in \mathbb{N}} \\ \square_* = \text{foncteur acyclique sur } \{\Delta^n\}_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$   
 et pour le morphisme de foncteurs  $\text{id} : H_0(C_*) \rightarrow H_0(\square_*)$   
 (puisque  $\Delta^0 = I^0$  et  $\Delta^1 = I^1 \Rightarrow H_0(C_*) = H_0(\square_*)$ )

2) avec  $\begin{cases} \square_* = \text{foncteur libre de modèle } \{I^n\}_{n \in \mathbb{N}} \\ C_* = \text{foncteur acyclique sur } \{I^n\}_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$   
 et pour le morphisme de foncteurs  $\text{id} : H_0(\square_*) \rightarrow H_0(C_*)$

Il existe donc 2 morphismes de foncteurs

$$\begin{aligned} f : C_* &\rightarrow \square_* \\ \text{et } g : \square_* &\rightarrow C_* \\ \text{tels que } H_0(f) = H_0(g) &= \text{id} \end{aligned}$$

$g \circ f : C_* \rightarrow C_*$  et  $\text{id} : C_* \rightarrow C_*$  sont 2 morphismes de foncteurs tels que  $H_0(g \circ f) = \text{id}_{H_0(C_*)}$ , donc sont homotopes d'après le Th. des modèles acycliques. Cela signifie que si  $X$  est un e.t. quelconque,

$$\begin{aligned} f_X : C_*(X) &\rightarrow \square_*(X) \\ g_X : \square_*(X) &\rightarrow C_*(X) \end{aligned}$$

sont des morphismes de chaînes tels que  $g_X \circ f_X : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$

et  $\beta_x \circ \alpha_x : \square_*(X) \rightarrow \square_*(X)$  soient chain-homotopes à l'identité, donc :

$$\begin{cases} H_n(\text{id}_{\square_n}) = H_n(\alpha_x \circ \beta_x) = H_n(\alpha_x) \circ H_n(\beta_x) \\ H_n(\text{id}_{\square_n(X)}) = H_n(\beta_x \circ \alpha_x) = H_n(\beta_x) \circ H_n(\alpha_x) \end{cases}$$

où  $H_n(\text{id}_{C_n(X)}) = \text{id}_{H_n(C_n(X))}$  et  $H_n(\text{id}_{\square_n(X)}) = \text{id}_{H_n(\square_n(X))}$ .

$\beta_x$  et  $\alpha_x$  sont donc des équivalences de chaînes, et  $H_n(\beta_x) : H_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n^\square(X)$  est un isomorphisme de  $R$ -modules.

Conclusion :  $H_n(X) \cong H_n^\square(X)$ , ie on peut utiliser indifféremment des simplexes ou des cubes pour définir l'homologie singulière de  $X$ .

## 2) Subdivisions barycentriques :

$$C_*(X) \xrightarrow{S} C_*(X)$$

linéaire sur  $\{\Delta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$      $\text{id}_{C_n(X)}$     acyclique sur  $\{\Delta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$S$  et  $\text{id}_{C_n(X)}$  induisent la même application sur  $H_0(C_n(X))$ , donc  $S$  et  $\text{id}_{C_n(X)}$  sont chaines-homotopes.

Ainsi  $H_n(S) = H_n(\text{id}_{C_n(X)}) = \text{id}_{H_n(X)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$  et le théorème des chaines petites d'ordre 2 (cf. L8) est montré.

# IV Homologie et cohomologie à coefficients

1° Rappels : produit tensoriel (cf. Quéré) ( $\square$  Produit tensoriel) unitaire

Soient  $A$  et  $B$  deux  $R$ -modules, où  $R$  désigne un anneau commutatif. Le produit tensoriel est l'unique  $R$ -module qui vérifie la propriété universelle : Pour tout  $R$ -module  $C$  et pour toute application  $R$ -bilineaire  $\beta: A \times B \rightarrow C$ , il existe une unique  $R$ -morphisme  $\tilde{\beta}$  qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\beta \text{ bil}} & C \\ \downarrow \beta & \nearrow \tilde{\beta} \text{ linéaire} & \\ A \otimes_R B & = \text{produit tensoriel de } A \text{ par } B & \end{array} \quad (\text{existence : voir Quéré})$$

Propriétés : Soit  $R$  un anneau commutatif et  $S$  un ensemble. On note  $R^{(S)}$  le  $R$ -module libre engendré par  $S$ , i.e. l'ensemble des applications à support fini de  $S$  dans  $R$ . Notons  $e_x \in R^{(S)}$  l'élément défini par :

$$\begin{aligned} e_x : S &\rightarrow R \\ s &\mapsto \delta_{sx} \end{aligned}$$

(1) Pour tout  $R$ -module  $M$ , on a :

$$\begin{aligned} R^{(S)} \otimes_R R^{(T)} &\simeq R^{(S \times T)} \\ R^{(S)} \otimes_R M &\simeq M^{(S)} \\ R \otimes_R M &\simeq M \end{aligned}$$

On le montre en utilisant la propriété universelle. Si l'on pose :

$$\begin{aligned} \beta : R^{(S)} \times R^{(T)} &\longrightarrow R^{(S \times T)} \\ \left( \sum_s \alpha_x e_x, \sum_t \beta_y e_y \right) &\longmapsto \sum_{(x,y) \in S \times T} \alpha_x \beta_y e_{(x,y)} \end{aligned}$$

on constate que  $\beta$  est bilinéaire et que le diag. suiv. est commutatif pour toute appl. bilinéaire  $g$  :

$$\begin{array}{ccc} R^{(S)} \times R^{(T)} & \xrightarrow{g} & M = R\text{-module} \\ \downarrow \beta & \nearrow \tilde{g} & \\ R^{(S \times T)} & \xrightarrow{\tilde{g} \text{ lin.}} & \end{array} \quad \begin{aligned} & \text{(où } \tilde{g}(e_{(x,y)}) = g(e_x, e_y) \text{ est} \\ & \text{complétée par linéarité)} \end{aligned}$$

donc  $R^{(S)} \otimes_R R^{(T)} \simeq R^{(S \times T)}$

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^{(S)} \times M & \xrightarrow{g} & N = R\text{-module} \\ \downarrow \beta & \nearrow \tilde{g} & \\ M^{(S)} & \xrightarrow{\tilde{g} \text{ lin.}} & \end{array}$$

$(\sum \alpha_x e_x, m) \mapsto \sum (\alpha_x m) e'_x$

$\tilde{g} = \text{morphisme de } R\text{-modules défini par}$   
 $\tilde{g}(m e'_x) = g(e_x, m)$   
 et complétée par linéarité.

(où  $e'_x : S \rightarrow M$   
 $s \mapsto \delta_{sx}$ )

$$\text{Ainsi } R^{(S)} \otimes_R M \simeq M^{(S)}$$

On peut prendre  $N = R^{(S)} \otimes M$  et avoir l'isomorphisme :

$$R^{(S)} \times M \xrightarrow{p} R^{(S)} \otimes M$$

$$\begin{array}{ccc} R^{(S)} \times M & \xrightarrow{p} & R^{(S)} \otimes M \\ \downarrow \beta & \nearrow \tilde{p} & \\ M^{(S)} & \xrightarrow{\tilde{p} \text{ isom. de } R\text{-mod.}} & \end{array}$$

$\tilde{p}(m e'_x) = e_x \otimes m$



Enfin, si  $P$  est un singleton,  $M^{(P)} \cong M$  d'où  $R \overset{P}{\otimes} M \cong R^{(P)} \otimes M \cong M^{(P)} \cong M$ ,  
ce que l'on peut obtenir directement en utilisant la propriété universelle.

$$(2) \quad A/B \otimes_R C \cong \frac{A \otimes_R C}{B \otimes_R C} \cong \frac{A \otimes_R C}{\{b' \otimes c / b \in B\}} \quad (\text{où l'on note } p(a \otimes b) = a \otimes b \text{ si } (a, b) \in A \times B)$$

Plus généralement, on a la formule  $A/A' \otimes B/B' \cong \frac{A \otimes B}{A' \otimes B + A \otimes B'}$  (utiliser la pro. universelle)  
(cf. produit tensoriel)

De (2) on déduit :

(3) Le produit tensoriel définit un foncteur exact à droite, ie  
pour toute suite exacte de  $R$ -modules  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$   
on a la suite exacte  $A \otimes_R N \rightarrow B \otimes_R N \rightarrow C \otimes_R N \rightarrow 0$

En effet,  $C \cong B/A \Rightarrow C \otimes N \cong (B/A) \otimes N \cong B \otimes N / A \otimes N$  d'après (2).  
*seulement si  $g$  injective, ce qui n'est pas le cas ici*

*Cavalier !  
il faut préciser  
les flèches.*

$$(4) \quad A \otimes_R B \cong B \otimes_R A \quad \text{et} \quad (A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

$$(5) \quad \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad \text{où } d = \Delta(m, n) \text{ est le pgcd de } m \text{ et } n.$$

On le montre en constatant que  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  admet  $i \otimes \bar{1}$  comme  
générateur (puisque  $x \otimes \bar{y} = xy \cdot i \otimes \bar{1}$ ), et que :

$$\begin{cases} m \cdot i \otimes \bar{1} = 0 \\ n \cdot i \otimes \bar{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow d(i \otimes \bar{1}) = 0 \Rightarrow \omega(i \otimes \bar{1}) \mid d$$

(où  $\omega(i \otimes \bar{1})$  désigne l'ordre de  $i \otimes \bar{1}$ )

En fait  $\omega(i \otimes \bar{1}) = d$  (sinon  $\omega(i \otimes \bar{1}) = k < d$  et  $k(i \otimes \bar{1}) = k \otimes \bar{1} \neq 0$   
car  $k < m$ ), d'où le résultat.

*à prouver! faux  
voir [1] Prod. Tensoriel*

Remarque : Le produit tensoriel n'est pas exact à gauche, car on a le contre  
exemple :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 6} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

$$(2) \quad \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 6} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}_{\substack{12 \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}_{\substack{12 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \rightarrow 0$$

en tenant compte de (1) et de l'expression de ces  
isomorphismes, on a :

$$\begin{array}{ccccc} (x \otimes y) & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & 6x \otimes y \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ x \cdot y & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & 6x \cdot y \end{array}$$

ce qui prouve que  
l'appl.  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$   
induite est encore la  
multiplication par 6.

La suite exacte (2) s'écrit :

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow[u \times 6 = x_2]{u} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{12} \longrightarrow 0$$

$$\left( \frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = \text{congru} \right)$$

Cette suite n'est pas exacte à gauche car  $\ker u = \{0, 2\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  donc :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow[u \times 2]{u} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

## 2° Foncteurs dérivés et foncteur de Torsion

Définition : Un foncteur  $F: \underline{R}\text{-Mod} \longrightarrow \underline{R}\text{-Mod}$  est exact (resp. exact à droite) si pour toute suite exacte (resp. exacte à droite) de  $R$ -modules

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0, \text{ l'image } 0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(v)} F(C) \longrightarrow 0$$

(resp.  $F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$ ) est encore une suite exacte.

(\*) (pour un foncteur exact à droite on ne suppose pas  $u \neq 0$ )  
 (\*\*) (pour un foncteur exact à gauche on ne suppose pas  $v \neq 0$ )

On va introduire la notion de foncteurs dérivés qui va mesurer le défaut d'exactitude d'un foncteur exact à droite et additif<sup>(\*)</sup>.

Définition : On appelle i-ième foncteur dérivé à gauche de  $F$  le foncteur  $L_i F$  qui vérifie :

$$(1) \quad L_0 F = F$$

(2) Sur toute suite exacte  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$  il existe des opérateurs bords  $\partial_i: L_i F(C) \longrightarrow L_{i-1} F(A)$  tels que l'on ait la suite exacte naturelle :

$$\dots \longrightarrow L_2 F(C) \xrightarrow{\partial_2} L_1 F(A) \longrightarrow L_1 F(B) \longrightarrow L_1 F(C) \xrightarrow{\partial_1} F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

Les foncteurs dérivés sont parfaitement caractérisés par ces 2 conditions.

Construction de  $L_i F$  : Étant donné un foncteur exact à droite  $F$ , il s'agit de montrer l'existence des foncteurs dérivés  $L_i F$ .

Soit  $M$  un  $R$ -module. On peut toujours choisir un complexe de  $R$ -modules projectif<sup>(+)</sup>, noté  $P_*$  :  $\dots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0$ , qui soit positif, acyclique et qui vérifie  $H_0(P_*) = M$ .

Un tel complexe s'appelle une résolution projective de  $M$ , et vérifie :

$$\dots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \simeq H_0(P_*) \longrightarrow 0$$

(+) Le  $R$ -module  $P$  est dit projectif si pour tout morphisme  $A \xrightarrow{g} B \rightarrow 0$  et pour tout  $f: P \rightarrow B$ , il existe un morphisme  $h: P \rightarrow A$  tel que  $g \circ h = f$ .

(\*) cf. Godement, Théorie des faisceaux, 5.2 p 93 et 1.3 p 13. F est dit additif si  $\forall u, v: A \rightarrow B$ ,  $A, B = R\text{-mod}$ .

$F(u+v) = F(u) + F(v)$ . Alors  $F(0) = 0$  (application nulle)

On l'obtient ainsi :

On a d'abord une surjection  $R^{(H)} \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$  où  $R^{(H)}$  est un  $R$ -module libre, donc projectif. Soit  $N_1 \doteq \text{Ker } \beta$  et  $P_0 \doteq R^{(H)}$ . Le noyau  $N_1$  de  $\beta$  est aussi le quotient d'un  $R$ -module libre, à savoir  $R^{(N_1)}$ . On pose  $P_1 = R^{(N_1)}$  et  $\partial_1 : P_1 \rightarrow P_0$  / le diagramme suiv. soit commutatif. Et ainsi de suite...

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & R^{(N_2)} & \xrightarrow{\partial_2} & R^{(N_1)} & \xrightarrow{\partial_1} & R^{(H)} \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0 \\ & & \searrow & & \searrow & & \parallel \\ & & N_2 & & N_1 & & P_0 \end{array} \quad (\text{résolution projective canonique})$$

( $N_2 = \text{Ker } \partial_1$ )

Par construction  $H_0(P_*) \simeq M$  et  $H_n(P_*) = 0$  si  $n > 0$ , puisque si  $n > 0$ ,  $H_n(P_*) = \frac{\text{Ker } \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}} = \frac{\text{Ker } \partial_n}{N_{n+1}} = 0$  ( $N_{n+1} = \text{Ker } \partial_n$  par construction)

On prendra alors :  $L_i F(M) = H_i(F(P_*))$  (\*)

Il faut vérifier que cette définition est indépendante de la résolution projective de  $M$  : Si  $P'_*$  est une autre résolution projective de  $M$ , le lemme (cf. L14) montre l'existence d'un morphisme de chaîne  $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unique à homotopie de chaînes près de  $P_*$  dans  $P'_*$  tel que  $H_0(\beta) = \text{id}_M : H_0(P_*) \rightarrow H_0(P'_*)$  (où  $M \simeq H_0(P_*) \simeq H_0(P'_*)$ )

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & P_2 & \rightarrow & P_1 & \rightarrow & P_0 \rightarrow M \simeq H_0(P_*) \simeq H_0(P'_*) \\ & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_0 \\ \dots & \rightarrow & P'_2 & \rightarrow & P'_1 & \rightarrow & P'_0 \end{array}$$

En fait, le m<sup>ême</sup> argument montre que  $\beta : P_* \rightarrow P'_*$  est une équivalence de chaînes,  $F(\beta) : F(P_*) \rightarrow F(P'_*)$  aussi d'où l'isomorphisme entre les groupes d'homologie  $H_n(F(P_*)) \simeq H_n(F(P'_*))$

[(\*)] l'additivité du foncteur  $F$  permet d'affirmer que  $\dots \rightarrow F(P_n) \xrightarrow{F(\partial_n)} F(P_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \rightarrow 0$  est encore une suite semi-exacte (ie un complexe), car  $F(\partial_{n-1})F(\partial_n) = F(\partial_{n-1}\partial_n) = F(0) = 0$

Montrons que  $L$  vérifie (1) et (2):

(1)  $L_0 F = F$  ?

Soit  $M$  un  $R$ -module.  $F$  est un foncteur exact à droite et transforme donc la suite exacte :

$$P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

en une suite exacte :

$$F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \rightarrow F(M) \rightarrow 0 \quad \text{donc } F(M) \cong \frac{F(P_0)}{F(\partial_1)(F(P_1))}$$

$F$  est un foncteur additif, donc transforme la suite semi-exacte

$$\dots \rightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \rightarrow 0$$

en une suite semi-exacte

$$\dots \rightarrow F(P_n) \rightarrow F(P_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \rightarrow 0$$

(car  $F(\partial_{n-1}\partial_n) = F(0) = 0 = F(\partial_{n-1}) \cdot F(\partial_n)$ )

Ainsi :

$$H_0(F(P_*)) \cong \frac{F(P_0)}{F(\partial_1)(F(P_1))} \cong F(M)$$

donc  $L_0 F(M) = H_0(F(P_*)) \cong F(M)$

(2) Lemme : Soit  $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$  une suite exacte de  $R$ -modules et  $P_*$  (resp.  $Q_*$ ) une résolution projective de  $A$  (resp.  $B$ )

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P_* & \rightarrow & P_* \oplus Q_* & \rightarrow & Q_* \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Alors  $P_* \oplus Q_* = \bigoplus (P_n \oplus Q_n)$  est une résolution projective de  $B$  et la suite des résolutions  $0 \xrightarrow{n \geq 0} P_* \rightarrow P_* \oplus Q_* \rightarrow Q_* \rightarrow 0$  est exacte et scindée. (pour chaque  $n \geq 0$ )

preuve :  $P_* \oplus Q_*$  est bien une suite de  $R$ -modules projectifs  $P_n \oplus Q_n$ , et l'on a la suite exacte

$$0 \rightarrow P_* \xrightarrow{f} P_* \oplus Q_* \xrightarrow{g} Q_* \rightarrow 0$$

(ie :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \rightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_n \oplus Q_n \xrightarrow{g_n} Q_n \rightarrow 0$  est exacte, où  $f_n$  et  $g_n$  sont les appl. naturelles)

Il faut définir les différentielles de  $P_* \oplus Q_*$  :

rang 0: Il faut définir le morphisme  $v: P_0 \oplus Q_0 \rightarrow B$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & P_0 & \xrightarrow{b_0} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{g_0} & Q_0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow p & \searrow \alpha & \downarrow v & \swarrow \beta & \downarrow q \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{u} & B & \xleftarrow{v} & C \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

$Q_0$  est projectif, donc il existe un morphisme  $\beta: Q_0 \rightarrow B$  /  $v \circ \beta = q$   
 On pose alors  $v = \alpha \oplus \beta$  où  $\alpha = u \circ p$ .

$v$  est surjective par construction ( $\forall b \in B \exists q_0 \in Q_0 \ q(q_0) = v(b)$ )  
 d'où  $v(\beta(q_0)) = v(b) \Rightarrow \beta(q_0) - b \in \text{Ker } v = \text{Im } u \Rightarrow \exists! a \in A \ \beta(q_0) - b = u(a)$   
 d'où  $b = \beta(q_0) - u(a) = \beta(q_0) - u \circ p(p_0)$  où  $p_0 \in P_0$ . Finalement,  
 on obtient bien  $b = v(q_0, -p_0)$

rang  $n \geq 1$ : On fait le même travail en complétant le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & P_n & \xrightarrow{b_n} & P_n \oplus Q_n & \xrightarrow{g_n} & Q_n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_n & \searrow \alpha_n & \downarrow \partial_n & \swarrow \beta_n & \downarrow \partial_n \\
 0 & \rightarrow & Z_{n-1}(P_*) & \xrightarrow{b_{n-1}} & Z_{n-1}(P_* \oplus Q_*) & \xrightarrow{g_{n-1}} & Z_{n-1}(Q_*) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \underbrace{0}_{(*) \ (n \geq 1)} & & \underbrace{0}_{(*) \ (n \geq 1)} & & \underbrace{0}_{(*) \ (n \geq 1)}
 \end{array}$$

(NB: si  $n=1$   
 $Z_0(P_*) = P_0$  et  $Z_0(Q_*) = Q_0$ )

(\*)  $\partial_n: P_n \rightarrow Z_{n-1}(P_*)$  est surjective car  $P_*$  (et  $Q_*$ ) sont des résolutions projectives de  $A$  (de  $B$ ), donc des complexes acycliques (ie, la suite semi-exacte  
 $\dots \rightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow 0$  est en fait exacte pour tout  $n \geq 0$ , ie  
 $\text{Im } \partial_n = \text{Ker } \partial_{n-1}$  si  $n \geq 1$  et  $\text{Im } \partial_1 \subset P_0$ . C'est ce qui nous a permis de  
 créer une suite exacte  $\dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$  à peu de frais, où  
 $A \cong H_0(P_*)$ )

On pose  $\partial_n = \alpha_n \oplus \beta_n$  où  $\alpha_n = b_{n-1} \circ \partial_n$  et  $\beta_n$  défini par:  $g_{n-1} \circ \beta_n = \partial_n$ .  
 $\partial_n: P_n \oplus Q_n \rightarrow Z_{n-1}(P_* \oplus Q_*)$  est surjective par construction, donc la  
 suite:

$$\dots \rightarrow P_n \oplus Q_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \oplus Q_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \oplus Q_0 \rightarrow 0$$

est un complexe de chaînes ( $\partial_{n-1} \circ \partial_n = (\alpha_{n-1} \circ \alpha_n) \oplus (\beta_{n-1} \circ \beta_n) = 0$ )

acyclique (car  $\text{Im } \partial_n = Z_{n-1}(P_* \oplus Q_*)$  si  $n \geq 1$ ), prolif, et  
 tel que  $H_0(P_* \oplus Q_*) \cong B$ . C'est donc une résolution projective de  $B$ .

La suite  $0 \rightarrow P_* \rightarrow P_* \oplus Q_* \rightarrow Q_* \rightarrow 0$  est exacte et scindée (pour tout  $n \geq 0$ ).

CFD

On peut maintenant montrer le (2) de la déf. du  $i$ -ième foncteur dérivé à gauche :  
 si  $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $R$ -modules, soient  $P_*$  et  $Q_*$  deux résolutions projectives de  $A$  et  $C$  respectivement. D'après le lemme précédent,  $P_* \oplus Q_*$  est une résolution projective de  $B$  et on a les suites exactes (en ligne) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P_* & \rightarrow & P_* \oplus Q_* & \rightarrow & Q_* \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Comme  $F$  est un foncteur exact à droite et comme la suite

$$0 \rightarrow P_* \rightarrow P_* \oplus Q_* \rightarrow Q_* \rightarrow 0$$

est scindée, on obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow F(P_*) \rightarrow F(P_* \oplus Q_*) \rightarrow F(Q_*) \rightarrow 0 \quad (+)$$

(en effet,  $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \rightarrow C \rightarrow 0$  est scindée si  $\exists r: B \rightarrow A / r \circ u = \text{id}_A$  donc  $F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(v)} F(C) \rightarrow 0$  et  $F(r)F(u) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$  donc  $F(u)$  est injective.)

La suite exacte (+) donne une suite exacte d'homologie longue, ie puisque  $L_i F(M) = H_i(F(P_*))$  :  $\dots \rightarrow L_2 F(C) \xrightarrow{\partial_2} L_1 F(A) \rightarrow L_1 F(B) \rightarrow L_1 F(C) \xrightarrow{\partial_1} F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$   
 CQFD

Définition :  $L_i(\otimes_R N) = \text{Tor}_i^R(, N)$  est le  $i$ -ième foncteur de torsion de  $N$ .

On note  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, N) = \text{Tor}(M, N)$  et  $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$ .

Résumé : Soit  $M$  et  $N$  2  $R$ -modules. Comment a-t-on défini  $\text{Tor}_n^R(M, N)$  ?

1) On prend une résolution projective  $P_* : \dots \rightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow 0$  de  $M$  (ie un complexe de chaînes positif, acyclique et tel que  $H_0(P_*) \cong M$ , et projectif)

2) On obtient un autre complexe de chaînes en tensorisant avec  $N$  :

$$P_* \otimes_R N : \dots \rightarrow P_n \otimes_R N \xrightarrow{\partial_n \otimes \text{id}_N} P_{n-1} \otimes_R N \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1 \otimes \text{id}_N} P_0 \otimes_R N \rightarrow 0$$

3) On calcule l'homologie de ce complexe :

$$\boxed{\text{Tor}_n^R(M, N) \doteq H_n(P_* \otimes N)}$$

Proposition 1:  $\forall H, N$   $R$ -modules,

(1)  $\text{Tor}_n^R(H, N) = \text{Tor}_n^R(N, H)$

(2) Si  $P$  est un  $R$ -module projectif, alors  $\text{Tor}_n^R(P, N) = 0 \quad \forall n \geq 1$

(3) Si  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $R$ -modules, on a la suite longue des  $\text{Tor}$  :

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_1(B, N) \rightarrow \text{Tor}_1(C, N) \xrightarrow{\partial_1} A \otimes N \rightarrow B \otimes N \rightarrow C \otimes N \rightarrow 0$$

(4)  $\text{Tor}_0^R(H, N) = H \otimes_R N$

N.B. :  $N = R$ -module libre  $\Rightarrow R$ -module projectif

preuve :

(1) sera montré plus tard

(2) provient du fait qu'un module projectif  $P$  possède une résolution projective évidente :

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{\text{id}} P \rightarrow 0$$

donc  $P_* : \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow P \rightarrow 0$

En tensorisant avec  $N$  :

$$P_* \otimes_R N : \dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow P \otimes_R N \rightarrow 0$$

d'où  $\begin{cases} \text{Tor}_0^R(P \otimes_R N) = P \otimes_R N \\ \text{Tor}_n^R(P \otimes_R N) = H_n(P_* \otimes_R N) = 0 \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$

(3) et (4) proviennent des 2 propriétés fondamentales d'un foncteur dérivé  $L_i F$  (cf L18) et de la définition  $\text{Tor}_n^R(, N) = L_i( \otimes_R N )$ .

CQFD

Calcul de  $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$

$\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre, de sorte que nous ayons une résolution libre évidente de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  (c'est vrai pour  $R/mR$  si  $R$  est un anneau principal) :

$$0 \rightarrow \underset{P_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{x \cdot m} \underset{P_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$  s'obtient en calculant le  $n$ -ième groupe d'homologie du complexe :

$$0 \rightarrow \underset{N}{\mathbb{Z} \otimes N} \xrightarrow{x \cdot m} \underset{N}{\mathbb{Z} \otimes N} \rightarrow 0$$

donc  $* H_0(P_* \otimes N) = N/mN \Rightarrow \text{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \simeq N/mN$

$* \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = H_1(P_* \otimes N) = (N_m)_m \doteq \{x \in N / mx = 0\} = \text{ensemble des éléments de } m\text{-torsion dans } N.$

$* \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = 0 \text{ si } n \geq 2.$

On vient de montrer que :

Proposition 2 : Si  $N$  est un  $\mathbb{Z}$ -module, et  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\text{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = (N)_m \doteq \{x \in N \mid mx = 0\}$$

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = 0 \quad \text{si } n \geq 2$$

En particulier,  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{0, \frac{n}{d}, \dots, \frac{(d-1)n}{d}\} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  où  $d = \Delta(m, n)$  est le pgcd de  $m$  et  $n$ .

### 3/ Théorème des coefficients universels en homologie

Il s'agit de comprendre le rôle de l'anneau des coefficients  $R$  dans la construction de l'homologie, et de montrer que l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  contient déjà toute l'information concernant l'homologie à coefficients dans un anneau quelconque  $R$ .

Si  $X$  est un e.t. et si  $R$  est un anneau commutatif, on sait construire :

$$\begin{cases} H_*(X; \mathbb{Z}) = H_*(C_*(X; \mathbb{Z})) \text{ où } C_n(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{(S_n(X))} \\ H_*(X; R) = H_*(C_*(X; R)) \text{ où } C_n(X; R) = R^{(S_n(X))} \end{cases}$$

et d'après le IV-19 p L17 :

$$C_n(X; R) = R^{(S_n(X))} = \mathbb{Z}^{(S_n(X))} \otimes_{\mathbb{Z}} R = C_n(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

On peut raisonnablement se demander si  $H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes R$  est égal à  $H_n(X; R)$ . C'est faux en général, mais on a :

### Théorème des coefficients universels :

Soient  $X$  un e.t. et  $R$  un groupe abélien (ie un  $\mathbb{Z}$ -module)\*. On a une suite exacte scindée pour tout  $q \geq 1$  :

$$0 \rightarrow H_q(X; \mathbb{Z}) \otimes R \rightarrow H_q(X; R) \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(X; \mathbb{Z}), R) \rightarrow 0 \quad (1)$$

Cette suite exacte est naturelle en ce sens :

Si  $f: X \rightarrow Y$  est continue, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_q(X; \mathbb{Z}) \otimes R & \rightarrow & H_q(X; R) & \rightarrow & \text{Tor}(H_{q-1}(X; \mathbb{Z}), R) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow H_q(f) \otimes \text{id}_R & & \downarrow H_q(f) & & \downarrow \text{Tor}(H_{q-1}(f), R) \\ 0 & \rightarrow & H_q(Y; \mathbb{Z}) \otimes R & \rightarrow & H_q(Y; R) & \rightarrow & \text{Tor}(H_{q-1}(Y; \mathbb{Z}), R) \rightarrow 0 \end{array}$$

(Cependant, la suite (1) n'est pas scindée de façon naturelle !)

(\*) on peut remplacer  $\mathbb{Z}$  par un anneau PID (ie un anneau principal, commutatif, comme  $\mathbb{Z}$ )



preuve :

$$C_q = C_q(X; \mathbb{Z})$$

$$B_q = B_q(X; \mathbb{Z})$$

$$Z_q = Z_q(X; \mathbb{Z})$$

$Z_.$  = complexe de chaînes  $\{Z_q\}_{q \in \mathbb{N}}$  de différentielle nulle. Son homologie est le complexe lui-même.

$B_.$  = complexe  $\{B_{q-1}\}_{q \in \mathbb{N}}$  de différentielle nulle

La suite exacte  $0 \rightarrow Z_q \hookrightarrow C_q \xrightarrow{\partial} B_{q-1} \rightarrow 0$  donne une suite exacte de morphismes de chaînes :

$$(a) \quad 0 \rightarrow Z_ \rightarrow C_ \xrightarrow{\partial} B_ \rightarrow 0$$

puisque tous les morphismes commutent avec les différentielles :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Z_q & \hookrightarrow & C_q & \xrightarrow{\partial} & B_{q-1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \rightarrow & Z_{q-1} & \hookrightarrow & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial} & B_{q-2} \rightarrow 0 \end{array}$$

$B_q \subset Z_q \subset C_q$  et  $C_q$  libre, donc  $B_q$  et  $Z_q$  sont libres et  $Z_.$ ,  $C_.$ ,  $B_.$  sont des complexes de chaînes libres. La suite exacte de Torsion associée à (a) donne, compte tenu du fait que  $B_q$  libre  $\Rightarrow \text{Tor}(B_q, R) = 0$  :

$$(b) \quad 0 \rightarrow Z_ \otimes R \rightarrow C_ \otimes R \xrightarrow{\partial \otimes \text{id}_R} B_ \otimes R \rightarrow 0$$

(On peut d'ailleurs obtenir (b) en constatant que, comme  $B_.$  est libre, il existe un morphisme réciproque  $0 \rightarrow Z_ \rightarrow C_ \hookleftarrow B_ \rightarrow 0$ . La suite est donc scindée, et le foncteur  $\otimes R$  est exact à droite !)

La suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte de complexes (b) donne alors :

$$(c) \quad \dots \rightarrow B_q \otimes R \xrightarrow{\partial} Z_q \otimes R \rightarrow H_q(X; R) \rightarrow B_{q-1} \otimes R \rightarrow Z_{q-1} \otimes R \rightarrow \dots$$

puisque  $H_q(Z_q \otimes R) = Z_q \otimes R$ , l'opérateur bord étant trivial dans  $Z_.$   
(idem pour  $B_.$ ,  $H_q(B_ \otimes R) = B_{q-1} \otimes R$ )

(NB : En fait,  $\partial$  est l'inclusion :  $\partial = \gamma_q \otimes \text{id}_R$  où  $\gamma_q : B_q \hookrightarrow Z_q$ . On le voit en se rappelant la définition de  $\partial$

$$\text{Si } 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad \partial : H_q(C) \rightarrow H_{q-1}(A)$$

$$\text{ou } \begin{cases} g(b) = \bar{z} \\ \partial b = f(u) \end{cases}$$

$$\text{Donc } B_q \otimes R = H_{q+1}(B_ \otimes R) \xrightarrow{\partial} Z_q \otimes R = H_q(Z_ \otimes R)$$

$$z \otimes r = [z \otimes r] \longmapsto \gamma_q(z) \otimes r \quad (\text{appliquer la définition à (b)})$$

D'autre part, la suite exacte

$$0 \rightarrow B_q \xrightarrow{\gamma_q} Z_q \rightarrow H_q \rightarrow 0$$

donne la suite exacte de Torsion :

$$(d) \quad 0 = \text{Tor}(Z_q, R) \rightarrow \text{Tor}(H_q, R) \rightarrow B_q \otimes R \xrightarrow{\gamma_q \otimes \text{id}_R} Z_q \otimes R \rightarrow H_q \otimes R \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} \text{Ker } \gamma_q \otimes \text{id}_R = \text{Tor}(H_q, R) \\ \text{Coker } \gamma_q \otimes \text{id}_R = H_q \otimes R \end{cases} \quad (e)$$

Il suffit alors d'intercaler (e) dans (c) :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow B_q \otimes R & \xrightarrow{\gamma_q \otimes \text{id}_R} & Z_q \otimes R & \xrightarrow{\gamma \otimes \text{id}_R} & H_q(X; R) & \rightarrow & B_{q-1} \otimes R \xrightarrow{\gamma_{q-1} \otimes \text{id}_R} Z_{q-1} \otimes R \rightarrow \dots \\ & & \searrow & \nearrow & \nearrow & & \nearrow \\ & & H_q \otimes R & & \text{Tor}(H_{q-1}, R) & & \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & & \nearrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (c)$$

(e) justifie les flèches bleues. Il suffit de mettre les flèches rouges bout à bout pour obtenir la suite exacte cherchée :

$$(1) \quad 0 \rightarrow H_q \otimes R \rightarrow H_q(X; R) \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}, R) \rightarrow 0$$

(C'est un phénomène général, facile à vérifier :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{b} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \xrightarrow{l} E \\ & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ & & \text{Coker } b & & \text{Ker } l & & \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\text{Coker } b = B / \text{Im } b \simeq B / \text{Ker } g$   
donc  $\tilde{g}$  est la factorisation canonique de  $g$ , donc injective.

Ensuite :  $h : C \rightarrow D$

$\tilde{h} : C \rightarrow \text{Im } h = \text{Ker } l$  est égale à  $h$  restreinte à l'arrivée.  $\tilde{h}$  est surjective par construction.

Enfin,  $\begin{cases} \text{Im } \tilde{g} = \text{Im } g = \text{Ker } h \\ \text{Ker } \tilde{h} = \text{Ker } h \end{cases}$  d'où  $\text{Im } \tilde{g} = \text{Ker } \tilde{h}$  par construction)

La suite exacte (1) est scindée ? oui, car la suite (b) est scindée

$$(b) \quad 0 \rightarrow Z \otimes R \rightarrow C \otimes R \xleftarrow{u} B \otimes R \rightarrow 0$$

et l'homomorphisme  $u$  se reporte sur (c) et (1).

Application: Calcul de  $H_n(X; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  où  $q \in \mathcal{P}$

Le théorème des coefficients universels donne:

$$(1) \quad H_n(X, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \left( H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \right) \oplus \text{Tor} \left( H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \right)$$

$H_n(X, \mathbb{Z})$  est de type fini, donc s'écrit de façon unique sous la forme:

$$H_n(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_n} \oplus \left( \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \bigoplus_{i=1}^{n_p} \mathbb{Z}/p^{n_i} \mathbb{Z} \right)$$

où  $0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_{n_p}$  et  $n_{n_p} = 0$  presque partout.

$b_n$  est le rang de  $H_n(X; \mathbb{Z})$  et s'appelle le  $n$ -ième nombre de Betti de  $X$

et  $\bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \bigoplus_{i=1}^{n_p} \mathbb{Z}/p^{n_i} \mathbb{Z}$  désigne le groupe (fini) de torsion de  $H_n(X; \mathbb{Z})$

La formule (1) s'éclaircit à la lumière des remarques suivantes:

1)  $(A \oplus B) \otimes R = (A \otimes R) \oplus (B \otimes R)$

$$\text{Tor}(A \oplus B, R) = \text{Tor}(A, R) \oplus \text{Tor}(B, R)$$

2) D'après le 1°,

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \mathbb{Z}/\text{mkg}(p, q)\mathbb{Z} & \text{si } p = q \end{cases} \end{cases}$$

3) D'après le 2° Pro. 2 :

$$\begin{aligned} \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) &= 0 && \text{car } \mathbb{Z} \text{ libre et } \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \text{ projectif} \\ \text{Tor}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \mathbb{Z}/\text{mkg}(p, q)\mathbb{Z} & \text{si } p = q \end{cases} \end{aligned}$$

Donc:

$$H_n(X, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \underbrace{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}_{b_n \text{ fois}} \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{n_q} \mathbb{Z}/\text{mkg}(n_i, q)\mathbb{Z} \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{n_q} \mathbb{Z}/\text{mkg}(n_i, q)\mathbb{Z} \right)$$

$$H_n(X, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \left( \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \right)^{b_n} \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{n_q} \left( \mathbb{Z}/\text{mkg}(n_i, q)\mathbb{Z} \right)^2 \right)$$

Calculons  $H_n(S^k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  : d'après la formule (1) et comme  
 $\text{Tor}(H_{n-1}(S^k; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$  dans tous les cas, on obtient :

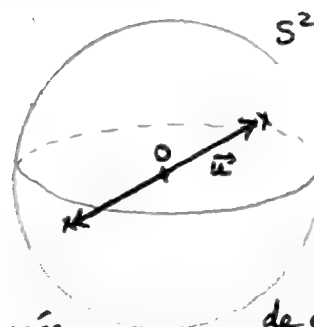
$$H_n(S^k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H_n(S^k, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \text{ et } k \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si } n=0 \text{ ou } k \end{cases}$$

Calculons  $H_n(\mathbb{P}^2 \mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  : Il faut d'abord savoir calculer l'homologie de  $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$  à coefficients entiers... Notons  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ .

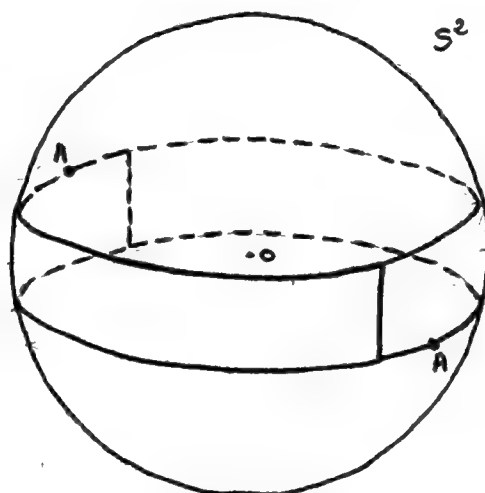
$\mathbb{P}^2$  est l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$ , et peut être donné par le revêtement à 2 feuillets  $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$   
 $\vec{u} \mapsto \mathbb{R}\vec{u}$

On écrit  $\mathbb{P}^2 = S^2 / \{\pm 1\}$

où  $\begin{cases} 1 = \text{id}_{S^2} \\ -1 = -\text{id}_{S^2} = \text{antipodie} \end{cases}$

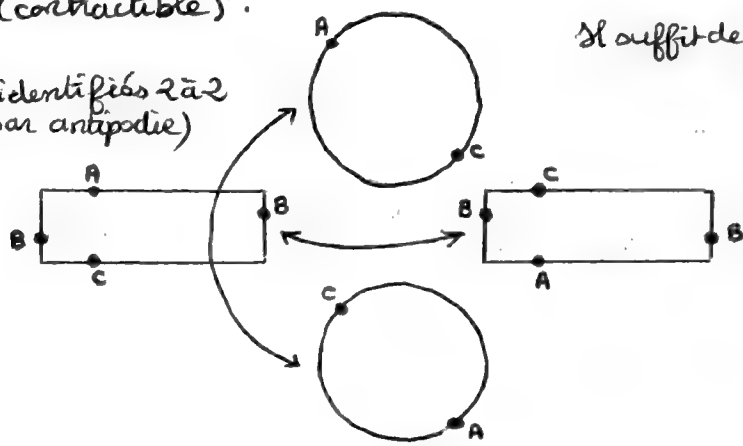


d'écriture  $\mathbb{P}^2 = S^2 / \{\pm 1\}$  nous donne une façon imagée de construire  $\mathbb{P}^2$ . On considère la sphère  $S^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On fixe une bande équatoriale de  $S^2$  et on envisage le découpage suivant :

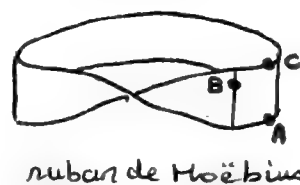


On obtient 4 morceaux dont on identifie certains points par antipodie : on obtient finalement  $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$  comme réunion d'un ruban de Moëbius et d'un disque  $D^2$  (contractible).

(identifiés 2 à 2 par antipodie)



Il suffit de prendre un disque et 1 rectangle, mais antipodie identifie encore 2 côtés opposés de ce rectangle pour donner un ruban de Moëbius ; on recolle enfin le bord du disque sur le bord du ruban de Moëbius :



l'homologie de  $\mathbb{P}^2$  peut se calculer en utilisant la suite de Mayer-Vietoris et les ensembles  $\begin{cases} X = D^2 \text{ (contractible)} \\ Y = \text{ruban de Moebius} \end{cases}$

$Y$  se rétracte sur le cercle  $S^1$



$$X \cap Y = \partial X \cong S^1$$

$X \sim *$  ( $\sim$  = se rétracte en, par déformation-rétraction)

$$Y \sim S^1$$

$$\begin{array}{ccc} \partial Y \hookrightarrow Y & \xrightarrow{\sim} & S^1 \\ \parallel & \nearrow & \\ S^1 & \xrightarrow{\times 2} & (on \text{ fait } 2 \text{ tours}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & \mathbb{Z} & \\ & \parallel & & \parallel & \\ H_2(X) \oplus H_2(Y) & \longrightarrow & H_2(\mathbb{P}^2) & \xrightarrow{\partial} & H_1(X \cap Y) \end{array}$$

$$\hookrightarrow H_1(X) \oplus H_1(Y) \longrightarrow H_1(\mathbb{P}^2) \longrightarrow H_0(X \cap Y) \xrightarrow{\circ \times (x^2)} H_0(X) \oplus H_0(Y) \longrightarrow H_0(\mathbb{P}^2) \longrightarrow 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} H_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \\ H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Si } n \geq 2 \quad \begin{array}{ccccc} H_n(X) \oplus H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{P}^2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X \cap Y) \\ \parallel & & & & \parallel \\ 0 \oplus 0 & & & & 0 \end{array}$$

$$\text{donc } H_n(\mathbb{P}^2) = 0.$$

Cela étant, il est facile d'utiliser (1) pour obtenir  $H_n(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  :

$$H_n(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (H_n(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$* \text{ Si } n \geq 2 \quad H_n(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Tor}(H_{n-1}(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 2 \\ \text{Tor}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

$$* H_1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$* H_0(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Gn remarque :

$$H_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H_2(\mathbb{P}^2) = 0$$

$$(n \geq 3) \quad H_n(\mathbb{P}^2) = 0$$

$$H_0(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H_2(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H_n(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$$

le terme de torsion en  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  reproduit (toujours) 2 termes de torsion de degré 1 et 2 dans l'homologie à coefficient dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .  
L'un provient de  $\otimes$  et l'autre de  $\text{Tor}$ .

## II Cohomologie

### 1° Définitions

La notion de cohomologie est duale de celle d'homologie. Soit  $X$  un espace topologique. On a construit le complexe de chaînes singulières  $C_*(X) = \mathbb{Z}^{S_*(X)}$ . Si  $M$  est un  $\mathbb{Z}$ -module, une  $n$ -cochaîne de  $X$  à valeurs dans  $M$  est une application  $\mathbb{Z}$ -linéaire de l'ensemble des  $n$ -chaînes  $C_n(X)$  dans  $M$ . On note  $C^n(X; M)$  l'ensemble des cochaînes de  $X$  à valeurs dans  $M$ .

Ainsi :

$$C^n(X; M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X), M)$$

où  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X), M)$  désigne le module des homomorphismes de  $\mathbb{Z}$ -modules de  $C_n(X)$  vers  $M$ .

Comme  $C_n(X) = \mathbb{Z}^{S_n(X)}$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{S_n(X)}, M) = M^{S_n(X)}$  = ensemble de toutes les applications de  $S_n(X)$  dans  $M$ .

Cela signifie simplement que pour se donner une application  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $C_n(X)$  dans  $M$ , il suffit de se donner une application (quelconque) de  $S_n(X)$  dans  $M$ , ie définie sur la base  $S_n(X)$  de  $C_n(X) = \mathbb{Z}^{S_n(X)}$ , et complétée par linéarité.

NB: Si  $S$  est un ensemble,  $\mathbb{Z}^S$  n'est pas libre si  $\# S \geq +\infty$  (difficile).

Norms  $C_n(X) = C_n$ . L'existence d'une différentielle  $C_n \xrightarrow{d} C_{n-1}$  permet de définir, par dualité, une différentielle de degré  $+1$  cette fois-ci :

$$\begin{array}{ccc} C^{n+1} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, M) & \xrightarrow{\partial} & C^n = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n-1}, M) \\ c & \longmapsto & \partial c / \partial c(\alpha) = (-1)^{|c|} c(d\alpha) \end{array}$$

où  $|c|$  désigne le degré de la cochaîne  $c$  ( $c \in C^n(X; M) \Leftrightarrow |c| = n$ )

Il est clair que  $\partial\partial = 0$ .

On possède donc un complexe de cochaînes (singulières) :

$$\dots \longrightarrow C^{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}} C^n \xrightarrow{\partial^n} C^{n-1} \longrightarrow \dots$$

Définition : La cohomologie singulière de  $X$  n'est autre que l'homologie de ce complexe de cochaînes :

$$H^n(X; M) = H_n(C^*(X; M)) = \frac{\text{Ker } \partial^n}{\text{Im } \partial^{n-1}}$$

### Cohomologie d'une paire :

Si  $(X, A)$  est une paire d'e.t, ie si  $A \subset X$ , on a la suite exacte scindée (car les  $\mathbb{Z}$ -modules sont tous libres) :

$$0 \longrightarrow C_*(A) \hookrightarrow C_*(X) \longrightarrow C_*(X, A) \cong \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \longrightarrow 0$$

En passant au dual :

$$(où \ C^*(X, A; M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, A), M))$$

$$0 \leftarrow C^*(A; M) \xleftarrow{\text{restriction}} C^*(X; M) \xleftarrow{\quad} C^*(X, A; M) \leftarrow 0$$

$C^*(X, A; M)$  est un sous-complexe de  $C^*(X; M)$  car il est facile de définir  $\partial : C^*(X, A; M) \rightarrow C^*(X, A; M)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & C^*(A; M) & \xleftarrow{\quad} & C^*(X; M) & \xleftarrow{\quad} & C^*(X, A; M) \leftarrow 0 \\ & & \uparrow \partial & & \uparrow \partial & & \uparrow \partial \\ 0 & \leftarrow & C^*(A; M) & \xleftarrow{\quad} & C^*(X; M) & \xleftarrow{\quad} & C^*(X, A; M) \leftarrow 0 \end{array}$$

On prend :  $\partial : C^*(X, A; M) \rightarrow C^*(X, A; M)$

$$\begin{array}{c} c \longmapsto \partial c \\ c \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)/C_*(A), M) \text{ défini } c \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X), M) \text{ et } (\partial c)|_A = \partial(c|_A) = 0 \\ \text{donc } \partial c \in \text{Ker } \iota = \text{Im } i, \exists \partial c \in C^*(X, A; M) / i(\partial c) = \partial c \end{array}$$

Finalement  $C^*(X, A; M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, A), M)$  où  $C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$  représente le complexe des cochaînes relatives modulo  $A$ .

Une cochaîne relative est donc une fonction  $\mathbb{Z}$ -linéaire sur les chaînes de  $X$  qui s'annule sur les chaînes de  $A$ .

La cohomologie de la paire  $(X, A)$  n'est autre que la cohomologie du complexe de cochaînes relatives  $C^*(X, A; M)$  :

$$H^*(X, A; M) = H^*(C^*(X, A; M))$$

On a clairement  $H^*(X, \emptyset; M) = H^*(X; M)$ .

~~44\*~~

On peut définir la cohomologie  $H^*$  comme étant un foncteur contravariant qui vérifie les 4 axiomes d'Eilenberg - Steenrod (calqués sur les axiomes de l'homologie) :

(A1) Exactitude : Si  $(X, A, B)$  est un triple d'e.t. , ie si  $X \supset A \supset B$ , on a la suite exacte longue :

$\dots \leftarrow H^n(A, B; M) \leftarrow H^n(X, B; M) \leftarrow H^n(X, A; M) \xrightarrow{\partial} H^{n-1}(A, B; M) \leftarrow \dots$   
et si  $(X', A', B')$  est un autre triple , si  $\beta : (X', A', B') \rightarrow (X, A, B)$  est une application continue de triples, ie si  $\beta : X' \rightarrow X$ ,  $\beta(A') \subset A$  et  $\beta(B') \subset B$ , alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \leftarrow & H^n(A, B; M) & \leftarrow & H^n(X, B; M) & \leftarrow & H^n(X, A; M) \xrightarrow{\partial} H^{n-1}(A, B; M) \leftarrow \dots \\ & & \downarrow H^n(\beta) \text{ (abus)} & & \downarrow H^n(\beta) & & \downarrow H^n(\beta) \\ \dots & \leftarrow & H^n(A', B'; M) & \leftarrow & H^n(X', B'; M) & \leftarrow & H^n(X', A'; M) \xrightarrow{\partial} H^{n-1}(A', B'; M) \leftarrow \dots \end{array}$$

(A2) Homotopie : Si  $f_1, f_2 : (X, A) \rightarrow (X', A')$  sont 2 applications continues homotopes en tant que paires, alors  $f_1^* = f_2^*$  où  $f_1^*, f_2^* : H^*(X', A'; M) \rightarrow H^*(X, A; M)$

(A3) Excision : Si  $(X, A, U)$  est un triple tel que  $\bar{U} \subset \mathring{A}$ , alors l'application canonique  $H^*(X, A; M) \xrightarrow{\sim} H^*(X \setminus U, A \setminus U; M)$  est un isomorphisme.

(A4) Dimension : La cohomologie du point  $*$  est triviale, ie

$$\begin{cases} H^n(*; M) = 0 & \text{si } n \neq 0 \\ H^0(*; M) = M \end{cases}$$

## 2°) Cohomologie extraordinaire :

Une théorie de la cohomologie bâtie avec les seuls axiomes (A1), (A2) et (A3) s'appelle une théorie de la cohomologie extraordinaire. Citons la  $K$ -théorie, le cobordisme...

$K$ -théorie : Si  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$  désigne l'ensemble de tous les fibrés vectoriels sur  $X$ ,  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$  est un monoïde pour l'opération "somme directe"  $\oplus$ , d'élément neutre le fibré nul  $0$ . On symétrise ce monoïde pour obtenir  $K_{\mathbb{R}}^0(X)$ .

Si  $X$  est compact, on peut symétriser le monoïde  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)/\sim$  où  $\sim$  est la relation d'équivalence :  $\xi \sim \eta \Leftrightarrow \exists \theta$  fibré trivial,  $\theta^n = X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$  /  $\xi \oplus \theta = \eta \oplus \theta$ .

Si  $X$  est compact et connexe, il suffira de symétriser les fibrés constants pour obtenir  $K_{\mathbb{R}}^0(X)$ .  $K_{\mathbb{R}}^0$  est un foncteur contravariant. Notons  $K_{\mathbb{R}}^0 = K^0$ .

On pose ensuite  $K^i(X) = K^0(S^i X^+)$  où  $X^+ = X \cup \{*\}$  et  $S(X)$  désigne la suspension de  $X$ , ie  $SX = X \times [0, 1] / X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$ .

$K^0(X, A) =$  *fibrés sur  $X$  avec support dans  $A$*

On peut alors vérifier (A1), (A2) et (A3). Mais on aura, avec cette construction :

$$K_{\mathbb{R}}^i(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \quad [8] \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 2 \\ 0 & 3 \\ \mathbb{Z} & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \end{cases}$$

On notera, enfin, qu'il n'y a qu'une seule théorie de la cohomologie ordinaire (ie non extraordinaire) sur les polyèdres.



### 3° Foncteur extension $\text{Ext}$

a) Soit  $R$  un anneau commutatif, et notons  $\text{Hom}_R(N, A) = \text{Hom}(N, A)$  le  $R$ -module des homomorphismes de  $N$  dans  $A$ .

Si  $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $R$ -modules, on a la suite exacte à gauche :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, A) \xrightarrow{\text{Hom}(u)} \text{Hom}(N, B) \xrightarrow{\text{Hom}(v)} \text{Hom}(N, C)$$

$$\beta \longmapsto u \circ \beta \longmapsto v \circ u \circ \beta$$

L'injectivité de  $\text{Hom}(u)$  est triviale :  $u \circ \beta = 0 \Rightarrow \forall n \in N \quad u(\beta(n)) = 0 \Rightarrow \beta(n) = 0$  car  $u$  injective, donc  $\beta = 0$ .

On dit que le foncteur covariant  $\text{Hom}(N, \cdot)$  est exact à gauche. C'est un foncteur additif qui commute aux sommes directes.

Si la suite exacte  $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$  est scindée, alors la suite des  $\text{Hom}$  est exacte à droite. En effet, soit  $v' : C \rightarrow B$  un inverse à droite de  $v$ .  $v \circ v' = \text{id}_C$ , donc  $\text{Hom}(v) \circ \text{Hom}(v') = \text{Hom}(\text{id}_C) = \text{id}_{\text{Hom}(N, C)}$  donc  $\text{Hom}(v)$  est surjective.

b) Le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, N)$  est contravariant et exact à gauche :

Si  $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$  est exacte, on a la suite exacte à gauche

$$\text{Hom}(A, N) \leftarrow \text{Hom}(B, N) \leftarrow \text{Hom}(C, N) \leftarrow 0$$

$$\beta \circ v \circ u \longleftarrow \beta \circ v \longleftarrow \beta$$

( $\beta \circ v = 0 \Rightarrow \beta \circ v(b) = 0 \quad \forall b \in B \Rightarrow \beta = 0$  car  $v$  surjective)

c) Le foncteur  $\text{Ext}^n$  est défini à partir du foncteur  $\text{Hom}(N, \cdot)$  ou  $\text{Hom}(\cdot, M)$  suivant la présentation adoptée, tout comme le foncteur torsion  $\text{Tor}^n$  était défini à l'aide du foncteur  $N \otimes$ .

Soient  $M$  et  $N$  2  $R$ -modules, et  $P_\bullet \rightarrow N$  une résolution projective de  $N$ . Le complexe de cochaînes  $\text{Hom}(P_\bullet, M) = (C^\bullet, \partial)$  où  $|\partial| = +1$  permet de calculer sa cohomologie :

$$H^*(C^\bullet) = \text{Ext}_R^*(N, M)$$

$$\text{ie } H^n(C^\bullet) = \text{Ext}_R^n(N, M) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On notera :

$\left. \begin{array}{l} M, N = R\text{-modules} \\ P_\bullet \rightarrow N \text{ résolution projective de } N \end{array} \right\}$	$\text{Ext}_R^n(N, M) = H^n(\text{Hom}(P_\bullet, M))$
---	--

Si  $\dots \xrightarrow{d} P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \rightarrow 0$  est une résolution projective de  $N$  (ie un complexe de chaînes positif acyclique projectif et tel que  $H_0(P_0) \cong N$ ), on construit le complexe de cochaînes:

$$\dots \xleftarrow{\partial} \text{Hom}(P_1, M) \xleftarrow{\partial} \text{Hom}(P_0, M) \xleftarrow{\partial} 0$$

$$\text{On a: } \text{Ext}_R^0(N, M) = H^0(\text{Hom}(P, M)) = \text{Ker } \partial = \text{Hom}(P_0, M).$$

En fait:

$$(1) \quad \text{Ext}_R^0(N, M) = \text{Hom}(N, M)$$

Il suffit d'écrire la suite exacte:  $\dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$  et de passer à  $\text{Hom}$ :

$$\dots \xleftarrow{\partial} \text{Hom}(P_1, M) \xleftarrow{\partial} \text{Hom}(P_0, M) \xleftarrow{\pi^*} \text{Hom}(N, M) \xleftarrow{\partial} 0 \quad (\text{suite exacte})$$

de sorte que l'on obtient bien:

$$\text{Ker } \partial = \text{Im } \pi^* \cong \text{Hom}(N, M)$$

On peut introduire le foncteur  $\text{Ext}$  en utilisant une résolution injective de  $M$ , (ie un complexe de cochaînes  $Q^*$  positif acyclique injectif\* et tel que  $H^0(Q_0) \cong M$ ). On pose alors  $\text{Ext}_R^n(N, M) = H^n(\text{Hom}(N, Q^*))$ .

$$\left. \begin{array}{l} M, N = R\text{-modules} \\ M \rightarrow Q^* \text{ résolution injective de } M \end{array} \right\} \quad \text{Ext}_R^n(N, M) = H^n(\text{Hom}(N, Q^*))$$

Propriétés:

(2) Si  $n \geq 1$ ,  $\text{Ext}_R^n(N, M) = 0$  dès que  $N$  est  $R$ -projectif ou dès que  $M$  est  $R$ -injectif

Si  $N$  est  $R$ -projectif,  $0 \rightarrow N \rightarrow N \rightarrow 0$  est une résolution projective de  $N$ ,

$$P_*: 0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

$$\text{Hom}(P_*, M): 0 \leftarrow \text{Hom}(N, M) \leftarrow 0$$

$$\text{donc } \text{Ext}_R^n(N, M) = H^n(\text{Hom}(P_*, M)) = \begin{cases} \text{Hom}(N, M) & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n>0 \end{cases}$$

Si  $M$  est  $R$ -injectif,  $0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0$  est une résolution injective de  $M$ ,

$$Q_*^*: 0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$\text{Hom}(N, Q_*^*): 0 \rightarrow \text{Hom}(N, M) \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \text{Ext}_R^n(N, M) = H^n(\text{Hom}(N, Q_*^*)) = \begin{cases} \text{Hom}(N, M) & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n>0 \end{cases}$$

cqfd

\* Un  $R$ -module  $M$  est dit injectif si pour toute application  $R$ -linéaire  $\beta: A \rightarrow B$  entre 2  $R$ -modules  $A$  et  $B$  et pour toute application  $R$ -linéaire  $g: A \rightarrow M$  il existe un homomorphisme de  $R$ -modules,  $\tilde{g}: B \rightarrow M$  qui rend le diagramme

ex:  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$  sont  $\mathbb{Z}$ -injectifs.

ex: Les modules projectifs et injectifs coïncident

sur l'anneau  $R = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ .

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\beta} & B \\ g \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \\ M & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{commutatif} \\ \text{(on renverse les flèches} \\ \text{de la situation} \\ \text{projectif !)} \end{array}$$

(3) Si  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $R$ -modules, la suite exacte à gauche  $0 \rightarrow \text{Hom}(N, A) \rightarrow \text{Hom}(N, B) \rightarrow \text{Hom}(N, C)$  peut être complétée à droite grâce aux foncteurs  $\text{Ext}_R^n$  pour obtenir la suite exacte longue d'extension :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, A) \rightarrow \text{Hom}(N, B) \rightarrow \text{Hom}(N, C) \rightarrow \text{Ext}_R^1(N, A) \rightarrow \text{Ext}_R^1(N, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(N, C) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_R^2(N, A) \rightarrow \dots$$

Il suffit d'appliquer l'axiome d'exactitude (A1) de la cohomologie et la définition de  $\text{Ext}_R^n(N, H) = H^n(\text{Hom}(N, Q))$ . La démonstration est semblable à celle du (2) p. L19 et L20 où l'on montre l'existence de la suite exacte longue de Torison.

Calcul dans certains cas ; Formulaire

$$\text{Ext}(\mathbb{Z}, M) = 0 \quad \forall M = \mathbb{Z}\text{-module, car } \mathbb{Z} \text{ est projectif.}$$

$$\text{Ext}(M, \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall M = \mathbb{Z}\text{-module, car } \mathbb{Q} \text{ est injectif.}$$

$$\text{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad \text{où } d = \Delta(m, n) \text{ est le pgcd de } m \text{ et } n$$

$$\text{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

$$0 \rightarrow \overset{P_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{x_m} \overset{P_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ est une résolution projective de } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

d'où :  $\text{Hom}(P_i, \mathbb{Z}) : 0 \leftarrow \underbrace{\text{Hom}(P_1, \mathbb{Z})}_{=\mathbb{Z}} \xleftarrow{x_m} \underbrace{\text{Hom}(P_0, \mathbb{Z})}_{=\mathbb{Z}}$

$$\text{Ainsi : } \text{Ext}^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$$

$$\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = H^1(\text{Hom}(P_i, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

En gardant la même résolution projective de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , on obtient :

$$\text{Hom}(P_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : 0 \leftarrow \underbrace{\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \xleftarrow{x_m} \underbrace{\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$$

$$\text{d'où } \text{Ext}^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \frac{n}{d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{où } d = \Delta(m, n)$$

$$\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{m(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad (\text{où } d = \Delta(m, n), \text{ eu})$$

$$\text{égale à la suite exacte : } 0 \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{x_m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

cqfd

#### 4°) Théorème des coefficients universels en cohomologie :

L'application :

$$\begin{aligned} j : H^n(X; M) &\longrightarrow \text{Hom}(H_n(X); M) \\ [c] &\longmapsto ([z] \rightarrow c(z)) \end{aligned}$$

est bien définie puisque ne dépend ni de  $c \in [c]$ , ni de  $z \in [z]$ . En effet, si  $c + \partial c' \in [c]$  et  $z + dx \in [z]$ , on a :

$$\begin{aligned} (c + \partial c')(z + dx) &= c(z + dx) + \partial c'(z + dx) \\ &= cz + \underbrace{(\partial c)}_{=0} x + c'(\underbrace{dz}_{=0}) + c'(\underbrace{ddx}_{=0}) = cz. \\ &\quad (\text{car } c = \text{cocycle}) \quad (\text{car } z = \text{cycle}) \end{aligned}$$

Le théorème suivant montre que l'on peut déduire  $H^*(X; M)$  de  $H_*(X)$ . Ainsi, calculer un groupe de cohomologie à coefficients dans  $M$  revient à calculer un groupe d'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

La démonstration omise de ce théorème est analogue à celle du Th. des coeff. univ. en homologie.

Théorème : On a la suite exacte naturelle en  $X$  et  $M$  :

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(X), M) \rightarrow H^n(X; M) \xrightarrow{j} \text{Hom}(H_n(X); M) \rightarrow 0$$

Cette suite est scindée (pas naturellement)

exercice : Calculer  $H^*(\mathbb{P}^2; \mathbb{R})$  en utilisant ce théorème, et à partir de  $H_*(\mathbb{P}^2; \mathbb{R})$  (donné en L23)

$$\text{On a : } 0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(\mathbb{P}^2; \mathbb{R}), \mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow H^n(\mathbb{P}^2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(H_n(\mathbb{P}^2; \mathbb{R}); \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

$$\text{donc } H^n(\mathbb{P}^2; \mathbb{R}) \simeq \text{Hom}(H_n(\mathbb{P}^2; \mathbb{R}); \mathbb{Z}) \quad \text{où } H_n(\mathbb{P}^2; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n=0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \neq 0, 1 \end{cases}$$

Finalement :

$$H^n(\mathbb{P}^2; \mathbb{R}) = \begin{cases} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} & \text{si } n=0 \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \neq 0, 1. \end{cases}$$

## VI Théorème de Künneth.

### 1° Produit tensoriel de 2 complexes.

Si  $C$  et  $D$  sont 2 complexes de chaînes (on notera indifféremment  $C_*=C$  et  $D_*=D$ ), on définit le complexe "produit tensoriel de  $C$  et  $D$ "

$$(C \otimes D, \partial)$$

en posant :

$$\begin{cases} (C \otimes D)_n = \sum_{p+q=n} C_p \otimes D_q \\ \partial(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y \end{cases}$$

où  $|x| = \text{degré de } x$ ,  $\partial$  étant complétée par linéarité.

On peut définir  $C^* \otimes D^*$  de la même manière pour des complexes de cochaînes.

Si  $C$  et  $D$  sont positives, ie  $C_n = D_n = 0$  si  $n < 0$ , la somme directe

$$\sum_{p+q=n} C_p \otimes D_q \text{ est finie.}$$

Vérifions que  $\partial$  est bien une différentielle, ie  $\partial \partial = 0$  :

$$\partial(\partial(x \otimes y)) = \underbrace{\partial^2 x}_{=0} \otimes y + (-1)^{|x|-1} \partial x \otimes \partial y + (-1)^{|x|} \partial x \otimes \partial y + (-1)^{|x|} x \otimes \underbrace{\partial^2 y}_{=0}$$

$$\partial^2(x \otimes y) = 0$$

On peut définir le morphisme de Künneth :

$$\begin{aligned} \kappa_{pq} : H_p(C) \otimes H_q(D) &\longrightarrow H_{p+q}(C \otimes D) \\ [z] \otimes [z'] &\longmapsto [z \otimes z'] \end{aligned}$$

puisque d'après la définition de la différentielle du complexe  $C \otimes D$ , on a :

$$\forall (z, z') \in Z_p C \times Z_q D \quad z' \otimes z \in Z_{p+q}(C \otimes D)$$

$$\text{et } \forall \partial u \in B_q D \quad z \otimes \partial u = (-1)^{|z|} \partial(z \otimes u) \in B_{p+q}(C \otimes D)$$

$$\forall \partial v \in B_p C \quad \partial v \otimes z' = 0$$

$$\text{Le morphisme } \kappa = \sum_{p+q=n} \kappa_{pq} : \sum H_p(C) \otimes H_q(D) \longrightarrow H_n(C \otimes D)$$

s'appelle le produit d'homologie des complexes  $C$  et  $D$ .

### Remarque :

Si  $G$  est un  $R$ -module et si  $D$  est le complexe  $\left. \begin{aligned} D_0 &= G \\ D_n &= 0 \text{ si } n \neq 0 \end{aligned} \right\}$  muni de la différentielle triviale  $\partial = 0$ , alors :

$$C \otimes D = C \otimes G \quad \text{ie } (C \otimes D)_n = C_n \otimes G \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \kappa : H_n(C) \otimes G &\longrightarrow H_n(C \otimes G) & \text{puisque } \left. \begin{aligned} H_0(D) &= G \\ H_n(D) &= 0 \text{ si } n \neq 0. \end{aligned} \right\} \\ [z] \otimes g &\longmapsto [z \otimes g] \end{aligned}$$

## 2° Produit de Torsion de 2 complexes

Si  $C$  et  $D$  sont 2 complexes de chaînes, le complexe de torsion n'est autre que :  $(\text{Tor}(C, D), \partial)$

$$\text{où } \begin{cases} (\text{Tor}(C, D))_n = \sum_{p+q=n} \text{Tor}(C_p, D_q) \\ \partial|_{\text{Tor}(C_p, D_q)} = \text{Tor}(\partial_p, \text{id}_{D_q}) + (-1)^p \text{Tor}(\text{id}_{C_p}, \partial_q) \end{cases}$$

Si  $C$  et  $D$  sont 2 complexes de chaînes,  $H(C) \doteq \{H_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est un complexe de chaînes dont le bord  $\partial$  est trivial (i.e.  $\partial = 0$ ). Alors :

$$H(C) \otimes H(D) \quad \text{où } (H(C) \otimes H(D))_n = \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D)$$

$$\text{et } \text{Tor}(H(C), H(D)) \quad \text{où } (\text{Tor}(H(C), H(D)))_n = \sum_{p+q=n} \text{Tor}(H_p(C), H_q(D))$$

sont des complexes de chaînes dont les bords  $\partial$  sont triviaux.

Avant d'aborder le théorème de Künneth, rappelons que :

Définition : Un  $R$ -module  $X$  est plat si  $\text{Tor}(X, Y) = 0$  pour tout  $R$ -module  $Y$ , ou, ce qui revient au même, si pour toute suite exacte de  $R$ -modules  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  la suite  $0 \rightarrow X \otimes A \rightarrow X \otimes B \rightarrow X \otimes C \rightarrow 0$  est encore exacte.

## 3° Lien entre $H_n(C \otimes D)$ , $H_n(C)$ et $H_n(D)$

### Théorème de Künneth

$C, D$  = complexes de chaînes de  $R$ -module, où  $R$  est un anneau principal.  
 $C$  ou  $D$  est libre.

On a alors la suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D) \xrightarrow{\kappa} H_n(C \otimes D) \rightarrow \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(C), H_q(D)) \rightarrow 0$$

(pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ).

preuve: Il faut trouver  $\ker \kappa$  et  $\operatorname{Coker} \kappa$ . Posons  $B = \{B_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $Z = \{Z_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $B^- = \{B_{q-1}\}_{q \in \mathbb{Z}} = \{B_q^-\}_{q \in \mathbb{Z}}$ .

$Z$  et  $B^-$  sont des complexes de chaînes à bord trivial, de sorte que la suite de morphismes de chaînes

$$0 \rightarrow Z \hookrightarrow C \xrightarrow{\partial} B^- \rightarrow 0 \quad (1)$$

soit exacte.

$B^-$  est un complexe de chaînes libre (car  $B_q^-$  est un sous-module du module libre  $C_{q-1}$  sur l'anneau principal  $R$ ), donc projectif, et la suite (1) est scindée. (cf. cah 1 p 21 & 49) On dispose donc de la suite exacte:

$$0 \rightarrow Z \otimes D \rightarrow C \otimes D \xrightarrow{\partial \otimes \operatorname{id}_D} B^- \otimes D \rightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue d'homologie:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(B^- \otimes D) \xrightarrow{\partial} H_n(Z \otimes D) \rightarrow H_n(C \otimes D) \rightarrow H_n(B^- \otimes D) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Z \otimes D) \rightarrow \dots \quad (2)$$

En fait  $\kappa : \sum_{p+q=n} Z_p \otimes H_q(D) \xrightarrow{\sim} H_n(Z \otimes D)$

et  $\kappa : \sum_{p+q=n} B_p^- \otimes H_q(D) \xrightarrow{\sim} H_n(B^- \otimes D)$

sont des isomorphismes.

En effet,  $Z$  (resp  $B^-$ ) est un complexe libre de bord trivial donc  $Z_p = H_p(Z)$  (resp  $B_p^- = H_p(B^-)$ ) et  $Z_p$  (resp  $B_p^-$ ) est plat puisque  $Z_p$  libre  $\Rightarrow Z_p$  projectif  $\Rightarrow Z_p$  plat. Le résultat provient du lemme:

Lemme: Si  $A$  est un complexe de chaînes de bord trivial (ie  $\partial=0$ ) et si  $A_n$  est un  $R$ -module plat pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le morphisme

$$\kappa : \sum_{p+q=n} A_p \otimes H_q(D) \xrightarrow{\sim} H_n(A \otimes D)$$

que l'on peut écrire  $\kappa : A \otimes H(D) \rightarrow H(A \otimes D)$ , est un isomorphisme.

preuve du lemme:

\*  $A_p = H_p(A)$  car le bord de  $A$  est trivial, et  $H_n(A \otimes D) = \sum H_n(A_p \otimes D)$  car  $A$  est la somme directe des  $A_p$ , chaque  $A_p$  étant  $p \in \mathbb{Z}$  considéré comme un complexe de chaînes (ie on prend le complexe  $\tilde{A} / \tilde{A}_n = 0$  si  $n \neq p$  et  $\tilde{A}_p = A_p$ , pour  $p \in \mathbb{Z}$  fixé)

\* Montrer le lemme revient à montrer que, si  $p$  est fixé et si  $A_p$  est un  $R$ -module plat (considéré comme une chaîne)

$$\kappa : A_p \otimes H_{n-p}(D) \xrightarrow{\sim} H_n(A_p \otimes D) \text{ est un isomorphisme.}$$

\* On peut se contenter de montrer l'isomorphisme pour  $p=0$ . Notons  $A_0 = G$  le  $R$ -module plat et montrons l'isomorphisme

$$\kappa: G \otimes H_n(D) \xrightarrow{\sim} H_n(G \otimes D) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B_n(D) & \xrightarrow{i} & Z_n(D) & \xrightarrow{p} & H_n(D) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \partial & & \downarrow j & & \\ & & C_{n+1}(D) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(D) & & \\ & & & & \downarrow \partial_n & & \\ & & & & C_{n-1}(D) & & \end{array}$$

est commutatif.

Comme  $G$  est plat, les lignes et colonnes du diagramme suivant sont encore exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G \otimes B_n(D) & \xrightarrow{id_G \otimes i} & G \otimes Z_n(D) & \xrightarrow{id_G \otimes p} & G \otimes H_n(D) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow id_G \otimes \partial & & \downarrow id_G \otimes j & & \\ & & G \otimes C_{n+1}(D) & \xrightarrow{id_G \otimes \partial_{n+1}} & G \otimes C_n(D) & & \\ & & & & \downarrow id_G \otimes \partial_n & & \\ & & & & G \otimes C_{n-1}(D) & & \end{array}$$

$id_G \otimes p$  est surjectif donc induit un isomorphisme  $\frac{G \otimes Z_n(D)}{\text{Im}(id_G \otimes i)} \xrightarrow{\sim} G \otimes H_n(D)$  par décomposition canonique.

$$\text{On a } (id_G \otimes j)(\text{Im}(id_G \otimes i)) = \text{Im}(id_G \otimes \partial_{n+1})$$

donc  $id_G \otimes j$  induit l'isomorphisme :

$$\frac{G \otimes Z_n(D)}{\text{Im}(id_G \otimes i)} \xrightarrow{\sim} H_n(G \otimes D)$$

$$\text{En effet, } H_n(G \otimes D) = \frac{\text{Ker}(id_G \otimes \partial_n)}{\text{Im}(id_G \otimes \partial_{n+1})} = \frac{\text{Im}(id_G \otimes j)}{\text{Im}(id_G \otimes \partial_{n+1})}$$

et  $G \otimes Z_n(D) \cong \text{Im}(id_G \otimes j)$  par  $id_G \otimes j$ , donc

$$\frac{G \otimes Z_n(D)}{\text{Im}(id_G \otimes i)} \cong \frac{\text{Im}(id_G \otimes j)}{id_G \otimes j(\text{Im}(id_G \otimes i))} = \frac{\text{Im}(id_G \otimes j)}{\text{Im}(id_G \otimes \partial_{n+1})}$$



Il suffit de constater que  $\kappa = \mu \circ \lambda^{-1}$ :

cqfd

$$\begin{array}{ccc} G \otimes H_n(D) & \xrightarrow{\kappa} & H_n(G \otimes D) \\ g \otimes [z] & & [g \otimes z] \\ & \searrow \lambda^{-1} \quad \nearrow \mu & \\ & G \otimes Z_n(D) & \\ & \downarrow \text{Im}(\text{id}_G \otimes i) & \\ & \overline{g \otimes z} & \end{array}$$

La suite (2) s'écrit alors :

$$\dots \rightarrow (B \otimes H(D))_n \xrightarrow{\Xi_n} (Z \otimes H(D))_n \rightarrow H_n(C \otimes D) \rightarrow (B \otimes H(D))_{n-1} \xrightarrow{\Xi_{n-1}} \dots$$

$$\text{où } \Xi_n = H_n(i \otimes \text{id}) \circ \kappa$$

d'où la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Coker } \Xi_n \rightarrow H_n(C \otimes D) \rightarrow \text{Ker } \Xi_{n-1} \rightarrow 0 \quad (3)$$

On obtient  $\text{Coker } \Xi_n$  et  $\text{Ker } \Xi_n$  en utilisant la suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow B_p \xrightarrow{i_p} Z_p \rightarrow H_p(C) \rightarrow 0 \quad (4)$$

qui donne :

$$B_p \otimes H_{n-p}(D) \xrightarrow{i_p \otimes \text{id}} Z_p \otimes H_{n-p}(D) \rightarrow H_p(C) \otimes H_{n-p}(D) \rightarrow 0 \quad (5)$$

$$\text{Notons que } \Xi_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} i_p \otimes \text{id}.$$

(4) est une résolution projective de  $H_p(C)$  car  $Z_p$  et  $B_p$  sont libres, donc  $\text{Ker}(i_p \otimes \text{id}) = \text{Tor}(H_p(C), H_{n-p}(D))$ . En additionnant toutes les suites obtenues à partir de (5) pour  $p \in \mathbb{Z}$ , on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \sum_p \text{Tor}(H_p(C), H_{n-p}(D)) \rightarrow (B \otimes H(D))_n \xrightarrow{\Xi_n} (Z \otimes H(D))_n \rightarrow (H(C) \otimes H(D))_n \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} \text{Ker } \Xi_n = (\text{Tor}(H(C), H(D)))_n \\ \text{Coker } \Xi_n = (H(C) \otimes H(D))_n \end{cases} \quad (\text{relation du 2°})$$

En remplaçant dans (3), on obtient la suite exacte de Künneth :

$$0 \rightarrow (H(C) \otimes H(D))_n \xrightarrow{\kappa} H_n(C \otimes D) \rightarrow (\text{Tor}(H(C), H(D)))_{n-1} \rightarrow 0$$

Cette suite est scindée :

Comme (1) et  $0 \rightarrow Z(D) \hookrightarrow D \xrightarrow{\partial} B^{-1}(D) \rightarrow 0$  sont des suites scindées, notons  $u : C \rightarrow Z$  et  $v : D \rightarrow Z(D)$  les inverses à gauche des inclusions canoniques.

Notons  $\begin{cases} p : Z \rightarrow H(C) \\ q : Z(D) \rightarrow H(D) \end{cases}$  les projections canoniques.

$p \circ u : C \rightarrow H(C)$  et  $q \circ v : D \rightarrow H(D)$  permettent de construire  $(p \circ u) \otimes (q \circ v) : C \otimes D \rightarrow H(C) \otimes H(D)$

On vérifie que  $w \doteq 1 + (p \circ u \otimes q \circ v) : H(C \otimes D) \rightarrow \underbrace{H(H(C) \otimes H(D))}_{(\text{car } H(C) \otimes H(D) \text{ est 1-complexe de bord trivial})} = H(C) \otimes H(D)$

est l'inverse à gauche de l'application  $(H(C) \otimes H(D))_n \xrightarrow{\kappa} H_n(C \otimes D)$  de la suite exacte de Künneth.

CQFD

Remarque : Si  $R$  est un anneau principal, supposons  $R = \mathbb{Z}$  :

1) Le morphisme de Künneth  $\kappa : (H(C) \otimes H(D))_n \rightarrow H_n(C \otimes D)$  est un isomorphisme dès que l'un des facteurs  $H_p(C)$  ou  $H_q(D)$  n'a pas de torsion, car  $\text{Tor}(\mathbb{Z}, M) = 0 \quad \forall M = \mathbb{Z}\text{-module}$

2)  $\left. \begin{array}{l} C \text{ et } D \text{ acycliques} \\ H_0(C) = \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow C \otimes D = \text{complexe acyclique}$

En effet,  $C$  et  $D$  n'ont d'homologie qu'en degré 0 et la suite exacte de Künneth s'écrit  $0 \xrightarrow{\kappa} H_n(C \otimes D) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \quad \forall n \neq 0$

3)  $C$  et  $D$  contractibles  $\Rightarrow C \otimes D$  contractible

Si l'on suppose que  $C$  et  $D$  sont libres, on a contractible  $\Leftrightarrow$  acyclique (cf. Spanier §4.2)

#### 4° Lien entre $H_n(X \times Y)$ , $H_n(X)$ et $H_n(Y)$

##### Théorème d'Eilenberg-Zilber :

Les 2 complexes  $C_*(X) \otimes C_*(Y)$  et  $C_*(X \times Y)$  sont homotopiquement équivalents, ainsi les homologies de ces 2 complexes coïncident :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n(C(X) \otimes C(Y)) = H_n(X \times Y)$$

preuve : Il faut montrer l'existence d'une équivalence homotopique naturelle entre les 2 complexes  $C_*(X) \otimes C_*(Y)$  et  $C_*(X \times Y)$  :

$$C(X) \otimes C(Y) \begin{matrix} \xleftarrow{A} \\ \xrightarrow{S} \end{matrix} C(X \times Y)$$

$A = EZ =$  morphisme d'Eilenberg-Zilber<sup>(\*)</sup>    tels que  $EZ \circ S \sim \text{id}_{C(X \times Y)}$   
 $S =$  Shuffle (battage de cartes)     $S \circ EZ \sim \text{id}_{C(X) \otimes C(Y)}$

(où  $\sim$  signifie "être homotope en tant que chaîne à  $+$ ")

On utilise essentiellement le théorème des modèles acycliques :

Rappel : Si  $\underline{\mathcal{C}} \xrightleftharpoons[G]{F} \underline{\text{R-complexes}}^+$  sont 2 foncteurs tels que :

- 1)  $F$  est libre sur le modèle  $\mathcal{M} = \{H_i\}$ , i.e.  $F_i(C) = R^{\{F_i(p)g_i\}_{g_i \in C^0(H_i, C)}}$  (où  $g_i \in H_i$ )
- 2)  $G$  acyclique sur le modèle  $\mathcal{M}$ , i.e.  $G(H_i)$  acyclique  $\forall H_i \in \mathcal{M}$

Alors tout morphisme de foncteurs  $H_0 F \rightarrow H_0 G$  est induit par un morphisme de foncteurs  $F \rightarrow G$  unique à homotopie près (cf L15 vers 8)

Prendons :  $\underline{\mathcal{C}} =$  catégorie des paires d'e.b.  $(X, Y) = \underline{\text{Top}} \times \underline{\text{Top}}$

$$F : \underline{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{R-complexes}}^+ \\ (X, Y) \longmapsto C(X) \otimes C(Y)$$

$$G : \underline{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{R-complexes}}^+ \\ (X, Y) \longmapsto C(X \times Y)$$

- \*  $F$  est libre sur les modèles  $(\Delta^p, \Delta^q)$ , où  $\Delta^p = p$ -simplexe euclidien, puis que  $C_*(X) \otimes C_*(Y) = R^{(S_*(X))} \otimes R^{(S_*(Y))} = R^{(S_*(X) \times S_*(Y))}$   
 et  $S_*(X) \times S_*(Y) = C^0(\Delta^p \times \Delta^q, X \times Y)$ .

\*  $G$  est acyclique sur  $(\Delta^p, \Delta^q)$  : on a  $H_n(C_*(\Delta^p \times \Delta^q)) = 0$  si  $n \neq 0$  car  $\Delta^p \times \Delta^q$  est contractible.

(\*) encore appelé "morphisme d'Alexander-Whitney"

\* Il existe un isomorphisme  $H_0(C(X) \otimes C(Y)) \xrightarrow[\sim]{\varphi} H_0(X \times Y)$ . (\*)

$\varphi$  se prolonge donc de manière unique à homotopie près en un morphisme de foncteurs  $F \rightarrow G$ . Choisissons en un :

$$S : C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$$

défini pour tout couple  $(X, Y)$  d'e.t. et unique à homotopie de chaîne près.

On obtient  $A : C_*(X \times Y) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y)$  de la même façon, puis que :

\*  $G$  est libre sur le module  $(\Delta^p, \Delta^q)$

\*  $F$  est acyclique sur  $(\Delta^p, \Delta^q)$

\*  $\varphi^{-1} : H_0(X \times Y) \longrightarrow H_0(X) \otimes H_0(Y)$  est un isomorphisme.

Il existe donc un unique morphisme qui prolonge  $\varphi^{-1}$ .

Enfin, on utilise encore le théorème des modèles acycliques pour constater que  $S \circ A$  est au dessus de l'identité  $\text{id} : H_0(X \times Y) \longrightarrow H_0(X \times Y)$ , et donc que  $S \circ A$  est homotope, en tant que chaîne, à  $\text{id}_{C_*(X \times Y)}$ .

De même pour  $A \circ S$ .

Conclusion :  $EZ$  et  $S$  sont bien des équivalences homotopiques

CQFD

Corollaire : Si  $X$  et  $Y$  sont z.e.t. et si  $R$  est un anneau principal,

on a :

$$H_n(X \times Y) \simeq \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \oplus \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y))$$

preuve :

On applique le th. de Künneth avec les complexes de chaînes singulières  $C(X)$  et  $C(Y)$  pour avoir la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \xrightarrow{\kappa} H_n(C(X) \otimes C(Y)) \longrightarrow \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y)) \longrightarrow 0$$

Il suffit d'utiliser le théorème d'Eilenberg-Zilber qui montre que

$$H_n(C(X) \otimes C(Y)) \simeq H_n(X \times Y)$$

pour conclure.

CQFD

(\*) Pour la composée :

$H_0(C(X) \otimes C(Y)) \xleftarrow{\kappa} H_0(X) \otimes H_0(Y) = R \otimes_R R = R = H_0(X \times Y)$ , où  $\pi_0(X)$  désigne l'ensemble des composantes connexes de  $X$ . C'est le th. de Künneth qui prouve que  $\kappa$  est un iso. au rang 0 car  $H_0(X)$  est libre!

Remarque : Si  $H_R(X)$  (ou  $H_R(Y)$ ) est libre ou projectif pour tout  $k < n$ , ou bien si  $R$  est un corps, on aura :

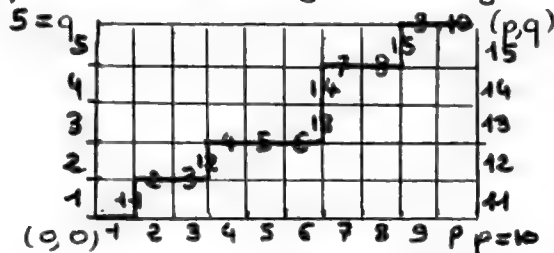
$$H_n(X \times Y) = \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y)$$

puisque  $\text{Tor}(M, N) = 0$  dès que  $M$  ou  $N$  est un  $R$ -module projectif

Formules explicites pour  $A$  et  $S$  :

Une permutation  $\sigma \in \Sigma_{p+q}$  est un  $(p, q)$ -shuffle si  $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$  et  $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$

A tout  $(p, q)$ -shuffle on peut faire correspondre un chemin croissant d'origine  $(0, 0)$  et d'extrémité  $(p, q)$  constitués de segments horizontaux ou verticaux : on obtient une bijection.



Le chemin rouge correspond au  $(p, q)$ -shuffle  $\sigma$  d'inverse

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 11 & 2 & 3 & 12 & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 7 & 8 & 15 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des  $(p, q)$ -shuffles est en bijection avec l'ensemble des fonctions croissantes de  $\{0, \dots, p+q\} \rightarrow \{0, p\} \times \{0, q\}$ , est de cardinal  $\binom{p+q}{p}$  et de signature  $E(\sigma) = (-1)^{a(\sigma)}$  où  $a(\sigma) = \int_0^p y(t) dx(t)$  représente l'aire sous le chemin associé à  $\sigma$ .

Pour chaque  $(p, q)$ -shuffle  $\sigma$ , on peut définir une application

$$\gamma_\sigma : \Delta^{p+q} \longrightarrow \Delta^p \times \Delta^q$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } S : C(X) \otimes C(Y) &\longrightarrow C(X \times Y) \\ \Delta \otimes t &\longmapsto \sum_{\sigma} E(\sigma) (\Delta \times t) \circ \gamma_\sigma \end{aligned}$$

$$\text{où } \begin{cases} \Delta \otimes t \in (C(X) \otimes C(Y))_{p+q} \\ \Delta : \Delta^p \rightarrow X \\ t : \Delta^q \rightarrow Y \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta^{p+q} \xrightarrow{\gamma_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{\Delta \times t} X \times Y$$

On vérifie que  $S$  commute avec les différentielles, i.e.  $S(\partial_X \otimes \text{Id}_Y + \text{Id}_X \otimes \partial_Y) = S \partial_{X \times Y}$  et induit le morphisme  $\varphi : H_0(C(X) \otimes C(Y)) \rightarrow H_0(X \times Y)$ .

On peut définir le morphisme d'Alexander-Whitney par :

$$\begin{aligned} A : C(X \times Y) &\longrightarrow C(X) \otimes C(Y) \\ \Delta = (\Delta_X, \Delta_Y) &\longmapsto \sum_{p+q=n} (\Delta_X \circ \lambda_p) \otimes (\Delta_Y \circ \rho_q) \end{aligned}$$

$$\text{où } \Delta \in S_n(X \times Y) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_X \in S_n(X) \\ \Delta_Y \in S_n(Y) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \lambda_p : \Delta^p &\longrightarrow \Delta^n && \text{désigne la } p\text{-face de front de } \Delta^n, \\ (a_0, \dots, a_p) &\longmapsto (a_0, \dots, a_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \rho_q : \Delta^q &\longrightarrow \Delta^n && \text{désigne la } q\text{-face de derrière de } \Delta^n, \\ (a_0, \dots, a_q) &\longmapsto (a_{n-q}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

5° En homologie relative :

La suite exacte de Künneth peut s'écrire avec l'homologie relative. Il suffit de considérer les complexes de chaînes :

$$\begin{aligned} C &= C(X, A) = \text{complexe de chaînes relatives de } X \text{ modulo } A, \\ D &= C(Y, B) = \text{ " " " de } Y \text{ modulo } B. \end{aligned}$$

d'où la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow \sum_{p+q=n} H_p(X, A) \otimes H_q(Y, B) \xrightarrow{\kappa} H_n(C(X, A) \otimes C(Y, B)) \longrightarrow \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(X, A), H_q(Y, B)) \longrightarrow 0$$

Problème : Re-écrire  $H_n(C(X, A) \otimes C(Y, B))$

mer 2 mars  
jeu 3 mars

26 j mercredi 16h.  
27 j jeudi 14h30  
30 j jeudi 14h30  
98 mercredi 16h  
107 jeudi 14h30

L28

L33 à L34

(n=10)  
L28 à L31

## (A) Introduction

La cohomologie permet d'avoir une structure plus agréable d'algèbre grâce à la cup-product:

$$H^p(X) \otimes H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X)$$

$c', c'' \qquad c' \cup c''$

ex:

(cap-product:  $\cap$ )

exemple:  $H^*(\mathbb{P}_2\mathbb{C}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & * \neq 0, 2, 4 \\ \mathbb{Z} & \text{si } * = 0, 2, 4 \end{cases}$

où  $\mathbb{P}_2\mathbb{C} = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$

$$\mathbb{P}_2\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} S^2 \cup e^4$$

$\downarrow$   
 $\mathbb{P}_1\mathbb{C}$

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2$$

$\downarrow H$   
 $S^2 = \mathbb{P}_1\mathbb{C}$

$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \cup e^n$  par  
l'app:  $S^n \hookrightarrow S^{n-1}$   
 $\downarrow$  fibration  
 $\mathbb{P}_n\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} S^n$

① Calculs  
 $H_*(\mathbb{P}_3\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0, 3 \\ \mathbb{Z} & * = 1 \\ 0 & * \neq 0, 1, 3 \end{cases}$

Appliquer Mayer-Vietoris sur un petit voisinage de  $e^4$  et grâce à  $\mathbb{P}_2\mathbb{C} = S^2 \cup e^4$

$$H^*(S^2 \vee S^4) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \neq 0, 2, 4 \\ \mathbb{Z} & \text{si } * = 0, 2, 4 \end{cases}$$

On pourrait calculer l'homologie de ces espaces en utilisant Mayer-Vietoris: le th. des coeff. unis. en coh. montre que  $H^*(H_n(X), H) = 0$  car  $H_{n-1}(X) = 0$  ou  $\mathbb{Z}$  donc que la cohomologie est la même.

On arrive donc pas à séparer  $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$  et  $S^2 \vee S^4$  en calculant la cohomologie. Ces 2 em. n'ont pas le même type d'homotopie!

$H^*(\mathbb{P}_2\mathbb{C}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$  a une structure d'algèbre

$a^2 = \underbrace{a \cup a}_{\in H^4} = nb$  où  $n \in \mathbb{Z}$  n'est un invariant du type d'homotopie de l'espace, car:

$\begin{cases} \text{pour } S^2 \vee S^4, n=0 \\ \text{pour } \mathbb{P}_2\mathbb{C}, n=\pm 1 \end{cases}$

③ Calculs  
 $H^*(\mathbb{P}_3\mathbb{R}, \mathbb{Z})$   
 $\mathbb{Z}_p$

④ Calculs  
 $H^*_{\text{ou}}(\mathbb{P}_2\mathbb{R} \times \mathbb{P}_2\mathbb{R}, \mathbb{Z})$   
 $\mathbb{Z}_p$

Relation entre  $H_*(X \times Y)$ ,  $H_*(X)$ ,  $H_*(Y)$ : Théorème de Künneth.

$C_*(X \times Y)$	$C_*(X)$	$C_*(Y)$
	$S_*(X)$	$S_*(Y)$
	$\Delta^p \rightarrow X$	$\Delta^q \rightarrow Y$
	$\Delta^p \times \Delta^q \rightarrow X \times Y$	

Si j'échais un homéomorphisme  $\Delta^{p+q} \rightarrow \Delta^p \times \Delta^q$  pour obtenir

$$S_*(X) \times S_*(Y) \rightarrow S_*(X \times Y)$$

qui donne automatiquement une applicati-:

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$$

car  $C_*(X) = \mathbb{Z}^{(S_*(X))}$

Mettre une différentielle sur  $C \otimes D$  /  $H(C \otimes D) \xrightarrow{\text{isom.}} H.C \otimes H.D$  ?  
 On définit ensuite le cup-produit par la diagonale:

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) \otimes C^*(X) & \xrightarrow{\sim} & C^*(X \times X) \\ & \searrow \text{équivalence d'homotopie de complexes} & \downarrow c^*(\Delta) \\ & & C^*(X) \end{array}$$

## ⑧ Produit tensoriel de 2 complexes

$C, D$  complexes de chaînes de  $\mathbb{Z}$ -modules (libres)

$(C \otimes D, d_\otimes)$  est un complexe de chaînes défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} (C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q \\ d_\otimes(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db \end{array} \right.$$

(Rem: on peut définir  $C' \otimes D'$  pour des complexes de cochaînes précisément de la même manière)

Le signe  $(-1)^{|a|}$  permet d'avoir  $d_\otimes d_\otimes = 0$

$$\begin{aligned} d_\otimes(d_\otimes(a \otimes b)) &= \underbrace{d^2 a}_{=0} \otimes b + (-1)^{|a|} da \otimes db + (-1)^{|a|} da \otimes db + (-1)^{2|a|} a \otimes d^2 b \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{NB: } z' \in Z_p C, z'' \in Z_q D \Rightarrow z' \otimes z'' \in Z_{p+q}(C \otimes D) \\ z' \otimes db = (-1)^{|z'|} d_\otimes(z' \otimes b) \end{array} \right\} (1) \quad (\text{on note } d_\otimes = d)$$

On peut donc définir :

$$\begin{array}{ccc} H.C \otimes H.D & \xrightarrow{K} & H.(C \otimes D) \\ [z] \otimes [z'] & \mapsto & [z \otimes z'] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{bien définie grâce} \\ \text{à (1).} \end{array}$$

morphisme de Künneth

Quelle est la défaut de surjectivité de ce morphisme ?

Théorème de Künneth : Soient  $C, D$  des complexes de chaînes libres de  $\mathbb{Z}$ -modules, non tels que  $C$  ou  $D$  soit libre

$$0 \rightarrow H_p(C) \otimes H_q(D) \xrightarrow{K} H_{p+q}(C \otimes D) \rightarrow \bigoplus_{i+j=p+q-1} \text{Tor}(H_i(C), H_j(D)) \rightarrow 0$$

NB: Künneth est un isomorphisme si l'un des facteurs n'a pas de torsion car  $\text{Tor}(\mathbb{Z}, M) = 0 \forall M$   $\mathbb{Z}$ -mod

preuve: cf. conf. universels en homologie - même de dém. Hyp:  $C$  libre

on démontre par  $0 \rightarrow Z_p C \subset C_p \xrightarrow{d} B_{p-1} \rightarrow 0$  scindée car  $B_{p-1}, C_p$  et  $Z_p$  libres...

OQF)

(8/4/20)



Co // Si  $C$  et  $D$  sont acycliques,  $C \otimes D$  aussi  
et  $H_0(C) = \mathbb{Z}$

Co // Si  $C$  et  $D$  sont acycliques et  $H_0 C = \mathbb{Z}$ ,  $C \otimes D$  est acyclique.

exercice :  $C, D$  contractibles  $\Rightarrow C \otimes D$  aussi

théorème : Les 2 complexes  $C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightarrow{\sim} C_*(X \times Y)$  sont homotopiquement équivalents

ie  $\exists$  équivalence homotopique naturelle entre ces 2 complexes :

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightleftharpoons[\cong]{S} C_*(X \times Y)$$

Eilenberg-Zilber  
 $\uparrow$   
 $\cong$ ,  $S$  morph. de chain  
shuffle (battage de cartes)  
 $\left\{ \begin{array}{l} E\mathbb{Z} \circ S \sim \text{id}_{C_*(X \times Y)} \\ S \circ E\mathbb{Z} \sim \text{id}_{C_*(X) \otimes C_*(Y)} \end{array} \right.$

Les homologies de ces 2 complexes sont donc les mêmes.

preuve : cf. Th. des modèles acycliques :

$$F \xrightarrow[\quad]{\quad} G \quad \mathbb{Z}\text{-complexe} \quad F, G \text{ foncteurs} \quad \left\{ \begin{array}{l} F \text{ libre sur } \{H_i\} \text{ ie } F_i(C) = \mathbb{Z}^{\text{nat} C(H_i, C)} \\ G \text{ acyclique} \end{array} \right.$$

Tout homomorphisme de foncteurs de  $H_0 F \rightarrow H_0 G$  se prolonge de manière unique (à homotopie près) en 1 morphisme de foncteurs de  $F \rightarrow G$

On prend ici :

$\mathcal{C}$  = couples d'espaces topologiques  $(X, Y) = \text{Top} \times \text{Top}$

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-complexe} \\ (X, Y) \longmapsto C_*(X) \otimes C_*(Y)$$

$$G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (X, Y) \longmapsto C_*(X \times Y)$$

modèles :  $F$  est libre sur les modèles  $(\Delta_p^F, \Delta_p^G)$   $\Delta_p^F = p$ -simplexe standard, car  $C_p(X) \otimes C_p(Y)$  libre de base  $\mathbb{Z}^{S_p(X) \times S_p(Y)}$

$G$  acyclique sur  $(\Delta_p^F, \Delta_p^G)$  car  $\Delta_p^F$  et  $\Delta_p^G$  sont contractibles.

Cet isomorphisme se prolonge de manière unique (à hom. près) en

1 morphisme de foncteurs de  $F \rightarrow G$

$E\mathbb{Z}$  est unique à homotopie près : on en choisit 1.

$$((H_0(X) \otimes H_0(Y) \xrightarrow{\sim} H_0(X \times Y)) \parallel \text{dL30})$$

isomorph.  $[(3, 3)]$

ou bien,  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ -module libre de générat. ou bien, composantes comme  $\mathbb{Z}^{S_p(X)}$ , donc

$H_0(X) \otimes H_0(Y) = \mathbb{Z}$ -module libre sur les composantes

Rémarque 5:

$G$  libre sur  $(\Delta^n, \Delta^n)$

$F$  acyclique sur  $(\Delta^n, \Delta^n)$

$$H_0(X \times Y) \xrightarrow{\sim} H_0(X) \otimes H_0(Y)$$

donc il existe morphisme  $S : C_*(X \times Y) \rightarrow C_*(X) \otimes SC_*(Y)$

De plus, on utilise encore le Th. des mod. acycl. pour constater que

$EZ \circ S$  est au dessus de l'identité  $H_0(X \times Y) \xrightarrow{id} H_0(X \times Y)$ , donc il est homotope à l'id  $C_*(X \times Y)$  car le foncteur  $EZ$  est libre et acyclique sur les modèles  $(\Delta_p, \Delta_q)$ .

CQFD

Calcul direct:

$$EZ(\sigma \otimes \tau)(t_0, t_1, \dots, t_{p+q}) = \sigma(t_0, \dots, t_p) \cdot \tau(t_{p+1}, \dots, t_{p+q})$$

$$\sigma : \Delta^p \rightarrow X$$

$$\tau : \Delta^q \rightarrow Y$$

$$C(X \times Y) \xrightarrow{A} C(X) \otimes C(Y)$$

$$\sigma = (\sigma_n, \sigma_y) \longmapsto \sigma_n \lambda_p \otimes \sigma_y \rho_{n-p}$$

$$\sigma \in S_n(X \times Y)$$

$$\sigma_n \in S_n(X)$$

$$\sigma_y \in S_n(Y)$$

où  $\lambda_p = p$ -ième face de front

$\rho_{n-p} = n-p$ -ième face de derrière

$$\lambda_p : \Delta^p \rightarrow \Delta^n$$

$$(a_0, \dots, a_p) \mapsto (a_0, \dots, a_p)$$

$$\rho_{n-p} : \Delta^{n-p} \rightarrow \Delta^n$$

$$(a_0, \dots, a_{n-p}) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-p}, a_{n-p}, \dots, a_n)$$

2) Si  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $T =$  variété diff

$V \subset U$ . Comment calculer  $H_R(U, U \setminus V)$ ?



ensemble de notations

NB

Alexander-Whitney

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightleftharpoons[S]{A} C_*(X \times Y) \quad C_n(X) = \mathbb{Z}^{(S_n(X))}$$

isomorph. canonique utilisé pour calculer le th. mod. cycl.

$$H_0(C_*(X) \otimes C_*(Y)) \xrightarrow{\cong} H_0(C_*(X \times Y))$$

$$\cong \uparrow K$$

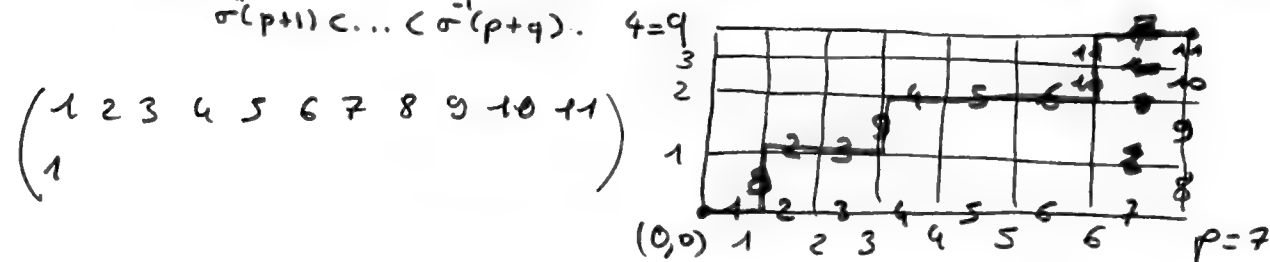
$$H_0(X) \otimes H_0(Y) = \mathbb{Z}^{(\pi_0(X))} \otimes \mathbb{Z}^{(\pi_0(Y))} = \mathbb{Z}^{(\pi_0(X) \times \pi_0(Y))} = \mathbb{Z}^{\pi_0(X \times Y)} = H_0(X \times Y)$$

 $\pi_0(X)$  = ensemble des composantes connexes de X

Le théorème de Künneth mentionne que l'isomorph. de Künneth est un isomorphisme au rang 0.

Formules explicites : a) Shuffle

(un shuffle  $\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}$  est un  $(p, q)$ -shuffle si  $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$  et  $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$ .)



À tout  $(p, q)$ -shuffle, on peut faire correspondre un chemin qui part de  $(0,0)$  et arrive en  $(p+q, p+q)$  en montant constamment, i.e. l'ens. de pts croissants de  $\{0, \dots, p+q\}$  dans  $\{0, p\} \times \{0, q\}$ , de la manière suivante :

E |  $(1, 8, 2, 3, 9, 4, 5, 6, 10, 11, 7)$  est un  $(7, 4)$ -shuffle

Nbre de  $(p, q)$ -shuffles =  $\binom{p+q}{p}$ . Si  $\sigma$  est un  $(p, q)$ -shuffle, sa signature

est  $\varepsilon(\sigma) = \text{aire sous le chemin associé à } \sigma = (-1)^{a(\sigma)}$

où  $a(\sigma) = \int_0^{p+q} y(t) dx(t)$  ( $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  chemin).

$$\sigma \mapsto \left\{ \Delta^{p+q} \xrightarrow{\gamma_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \right\}$$

il y a  $\binom{p+q}{p}$  applications.

$$S : C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$$

$$\alpha \otimes \beta \in (C_*(X) \otimes C_*(Y))_{p+q} \mapsto \sum \varepsilon(\sigma) (\alpha \times \beta) \circ \gamma_\sigma$$

$$\alpha : \Delta^p \rightarrow X$$

$$\beta : \Delta^q \rightarrow Y$$

$$\Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{\alpha \times \beta} X \times Y$$

$$\uparrow \gamma_\sigma$$

$$\Delta^{p+q}$$

On vérifie que  $S$  commute avec les différentiels :

$$S(\partial_x \otimes \text{id}_Y + (\text{id}_X \otimes \partial_Y) = S \partial_{X \times Y}$$

Dans l'autre sens b) morphisme d'Alexander - Ushitrey

$$A : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes C(Y)$$

$$\Delta = (\Delta_X, \Delta_Y) \longmapsto \sum_{i+j=n} \Delta_X^i \otimes \Delta_Y^j$$

où  $\Delta \in S_n(X \times Y)$

$$\Delta_X \in S_n(X)$$

$$\Delta_Y \in S_n(Y)$$

$$\Delta^i \xrightarrow{\lambda_i} \Delta^n \xrightarrow{\Delta} X$$

$$(0, \dots, i) \mapsto (0, \dots, i)$$

$i$ -ième base de front

$$\Delta^j \xrightarrow{\rho_j} \Delta^n \xrightarrow{\Delta} X$$

$$(0, \dots, j) \mapsto (n-j, \dots, n)$$

$j$ -ième base de derrière

### CUP-PRODUIT

$R$  = anneau (ie  $\mathbb{Z}$ -algèbre) commutatif.

$$H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \longrightarrow H^*(X; R)$$

$$a \quad b \longmapsto a \cup b \text{ ou } ab$$

$$H^*(X; R) = H^*(C^*(X; R)) \text{ où } C^*(X; R) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X), R) = R^{S(X)}$$

le morphisme

D'après le ~~théorème~~ de Künneth  $K$  donne : pas forcément injectif ! car les complexes ne sont pas libres.

$$H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \xrightarrow{K} H^*(C^*(X; R) \otimes C^*(X; R))$$

$\downarrow H^*(-)$  est injective  $\oplus$

$$H^*(\text{Hom}(C_*(X) \otimes C_*(X), R)) \oplus$$

$$S \downarrow H^*(A)$$

( $A$  = morphisme d'Alex. Ushitrey)

$$H^*(\text{Hom}(C_*(X \times X), R)) \cong H^*(C^*(X \times X)) = H^*(X \times X; R)$$

$$H^*(X; R)$$

$$H^*(\Delta)$$

$$\Delta = \text{diagonale} : \Delta : X \longrightarrow X \times X$$

⊕  $H^*({}^tA)$  est un isomorphisme (d'après lemme de S et th. coef. univ.)

$$\begin{array}{c}
 H^*(X \times Y) = H^*(C(X) \otimes C(Y)) \xleftarrow{\quad} H^*(X) \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 \text{Tor}(H_*(X), H_*(Y)) \\
 \uparrow \\
 H_*(X \times Y) = H_*(C(X) \otimes C(Y)) \\
 \uparrow \kappa \\
 H_*(X) \otimes H_*(Y) \\
 \uparrow \\
 0
 \end{array}$$

suite de Kunnet (libre!)

(Si on voit que  $\kappa$  est un iso  
si  $H_*(X)$  ou  $H_*(Y)$  libre

ce qui n'est pas le cas de  $\kappa$   
dans la feuille précédente.

⊗ Lem de S :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow \text{Ext}(H_{*-1}(C \otimes C), R) & \rightarrow & H^*(\text{Hom}(C \otimes C, R)) & \rightarrow & \text{Hom}(H_*(C \otimes C), R) & \rightarrow & 0 \\
 \text{Ext(isom)} \downarrow \cong & & \downarrow H^*({}^tA) & & \downarrow \cong \text{Hom(isom)} & & \\
 0 \rightarrow \text{Ext}(H_{*-1}(C(X \times X)), R) & \rightarrow & H^*(\text{Hom}(C(X \times X), R)) & \rightarrow & \text{Hom}(H_*(X \times Y), R) & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

donc  $H^*({}^tA)$  est un isomorphisme.

⊕

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(C, R) \otimes \text{Hom}(C, R) & \rightarrow & \text{Hom}(C \otimes C, R) \\
 \beta \otimes g & \mapsto & (x \otimes y \mapsto \beta(x) \otimes g(y))
 \end{array}$$

injectif seul.

(surjectif dès qu'on a

des  $R$ -mod de type fini,

ce qui n'est pas le cas ici)

Tout est canonique sauf peut être  $H^*({}^tA)$ .

## Propriétés du cup-produit

$$H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \xrightarrow{\cup} H^*(X; R) \quad / \quad H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X; R)$$

1°  $\cup$  est  $R$ -bilineaire  $(\lambda a) \cup b = a \cup (\lambda b) = \lambda(a \cup b)$

2° associatif  $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

3° commutatif au sens gradué :  $a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$

4°  $1 \in H^0(X; R)$  = fct constante qui vaut 1 en tous les points (soit  $C^0(X)$  = fcts ou les pts  $C_0(X)$ .) Alors  $1 \cup a = a \cup 1$

$H^*(X; R)$  =  $R$ -algèbre graduée commutative

preuve: 3°

~~DEF~~:

$$C_*(X \times Y) \xrightleftharpoons[S]{A} C_*(X) \otimes C_*(Y)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow C_*(T) & & \downarrow T/a \otimes b = (-1)^{|a||b|} b \otimes a \\ C_*(Y \times X) & \xrightleftharpoons{\quad} & C_*(Y) \otimes C_*(X) \end{array}$$

de sorte que ce morphisme commute avec les différentielles.

Alors ce diagramme commute (utiliser le th. modèles acycliques)

$$\begin{aligned} T: X \times Y &\rightarrow Y \times X \\ (x, y) &\rightarrow (y, x) \end{aligned}$$

exercice: Dans  $S^2 \vee S^2 \vee S^4$  le  $u^2 = 0$

~~et~~  $S^2 \times S^2$  le  $u^2$

mais en  $H^*(S^2 \vee S^2 \vee S^4) = H^*(S^2 \times S^2)$  est un isomorphisme de  $R$ -modules mais non d'algèbre. On peut donc distinguer ces 2 espaces en regardant le cup-produit  $\cup$ .

(Bibli: Voir la dualité de Poincaré ou Greebeng.)

## Suites spectrales.

Si  $(X, A)$  est une paire, on a la suite exacte  $0 \rightarrow C(A) \rightarrow C(X) \rightarrow C(X, A) \rightarrow 0$   
d'où la suite exacte d'homologie longue

$$\begin{array}{ccc} H_*(A) & \longrightarrow & H_*(X) \\ \nwarrow -1 & & \swarrow \\ & H_*(X, A) & \end{array}$$

et l'on peut parfois calculer l'homologie de  $X$  connaissant  $H_*(A)$  et  $H_*(X, A)$ .

Une filtration généralise la notion de paire : Une filtration (resp. une filtration différentielle) d'un objet  $X$  (resp. d'un objet différentiel  $X$ ) est la donnée d'une suite croissante de sous-objets

$$\dots \subset F_p X \subset F_{p+1} X \subset F_{p+2} X \subset \dots \subset X$$

(resp. qui vérifient de plus  $d(F_p X) \subset F_p X$ )

Dans la pratique  $F_p X = \emptyset$  si  $p < 0$  et  $F_p X = X$  si  $p$  assez grand.

ex: Si  $A \subset X$ , on peut prendre  $\begin{cases} F_p X = \emptyset & \text{si } p < 0 \\ F_0 X = A \\ F_1 X = X = F_p X & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$

ex:  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = S^2 \cup e^4 \cup e^6 \cup \dots \cup e^{2n}$  est muni d'une filtration naturelle.

Une filtration introduit de nombreuses paires topologiques qu'il s'agit de structurer :

paire  $(F_p X, F_{p-1} X)$

$$H_*(F_{p-1} X) \longrightarrow H_*(F_p X)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \nwarrow -1 & & \swarrow \\ & H_*(F_p X, F_{p-1} X) & \end{array} \quad (\text{triangle exact})$$

paire  $(X, F_p X)$

$$H_*(F_p X) \longrightarrow H_*(X)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \nwarrow -1 & & \swarrow \\ & H_*(X, F_p X) & \end{array}$$

Si  $i: F_p X \hookrightarrow F_{p+1} X$ , posons  $F_n(H(X)) = \Delta_n(H(i): H(F_n X) \rightarrow H(X))$ .

On obtient une filtration de l'homologie  $HX$ :

$$F_n(HX) \subset F_{n+1}(HX) \subset \dots \subset HX$$

Etant donnée n'importe quelle filtration  $\{F_p X\}_p$  d'un objet  $X$  on définit le gradué associé à cette filtration par :

$$\text{Gr.}(X) = \{ \text{Gr}_p X \}_p \quad \text{ou} \quad \text{Gr}_p X = \frac{F_p X}{F_{p-1} X}$$

Posons :

$$\begin{aligned} A_{p,q} &= H_{p+q}(F_p X) \\ E_{p,q} &= H_{p+q}(F_p X, F_{p-1} X) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \text{degré filtrant} \\ p+q = \text{degré total} \\ q = \text{degré complémentaire} \\ (p,q) = \text{bidegré} \end{array} \right.$$

$\{A_{p,q}\}$  et  $\{E_{p,q}\}$  sont des objets bi-gradués, et l'on obtient un couple exact (terminologie de Massey) :

$$\begin{array}{ccc} A_{*,*} & \xrightarrow[ i ]{ (+1, -1) } & A_{*,*} \\ & \searrow \scriptstyle R \quad \swarrow \scriptstyle j & \\ (-1, 0) & & (0, 0) \\ & E_{*,*} & \end{array} \quad (+1, -1) = \text{degré de l'application } i$$

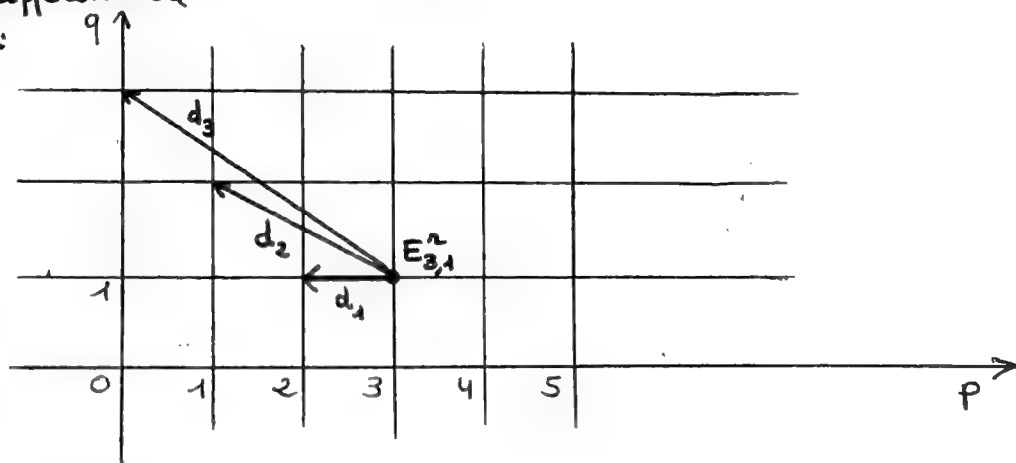
On peut définir la notion de couple dérivé (cf. Annexe A, §1) et dériver plusieurs fois le couple  $(A_{*,*}, E_{*,*}, i, j, R)$  pour obtenir les couples exacts dérivés :

$$\begin{array}{ccc} A_{*,*}^n & \xrightarrow[ i^{(n)} ]{ (1, -1) } & A_{*,*}^n \\ & \searrow \scriptstyle R^{(n)} \quad \swarrow \scriptstyle j^{(n)} & \\ (-1, 0) & & (1-n, n-1) \\ & E_{*,*}^n & \end{array} \quad \text{ou : } \begin{cases} A_{p,q}^1 = A_{p,q} \\ E_{p,q}^1 = E_{p,q} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} i^{(n)} = \text{restriction de } i \\ \text{à } i^{(n-1)} A \\ j^{(n)} = j \circ i^{n-1} \text{ (abus)} \\ R^{(n)} = R \text{ (abus)} \end{array} \right.$$

$d^n = j^{(n)} \circ R^{(n)}$  est la différentielle de l'objet  $E_{*,*}^n$ , de degré  $|d^n| = (-n, n-1)$

ie  $d_{p,q}^n : E_{p,q}^n \longrightarrow E_{p-n, q+n-1}^n$

On représente souvent la différentielle  $d_{p,q}^n$  par un graphique :





Beaucoup d'arguments concernant les suites spectrales sont purement géométriques et sont donnés par observation de la représentation graphique précédente.

Retour à la situation du bigradué : 2 cas pour  $F_p = F_p X$

$$A_{p,q}^1 = H_{p+q}(F_p)$$

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(F_p, F_{p-1})$$

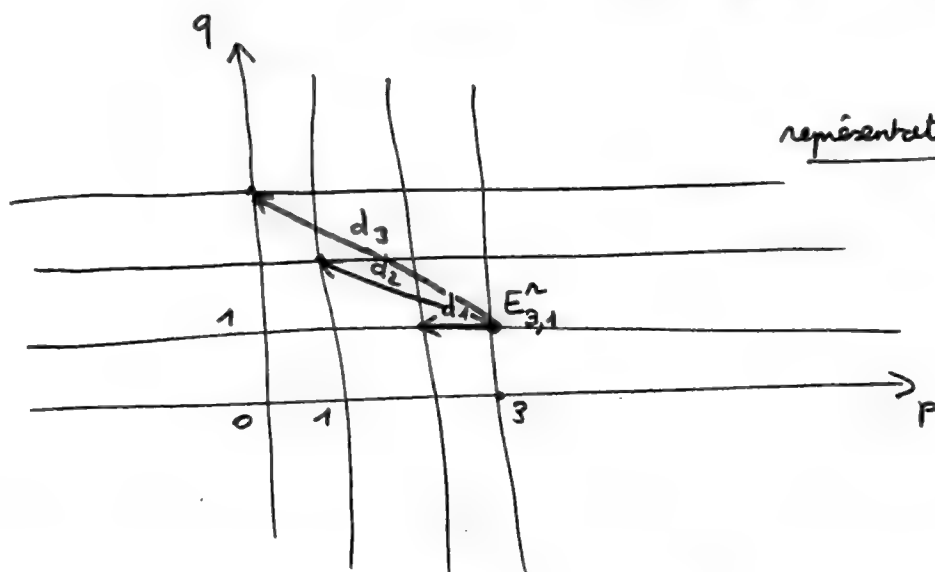
$$\begin{array}{ccc} A_{*,*}^1 & \xrightarrow[(1,-1)]{i} & A_{*,*}^1 \\ & \nwarrow (-1,0) & \searrow j(0,0) \\ & E_{*,*}^1 & \end{array}$$

d'où les couples dérivés :

$$\begin{array}{ccc} A_{*,*}^n & \xrightarrow[(1,-1)]{i^{(n)}} & A_{*,*}^n \\ & \nwarrow (-1,0) & \searrow j^{(n)} \\ & E_{*,*}^n & \end{array} \quad d^n = j^{(n)} \circ i^{(n)}$$

$$|d^n| = (-n, n-1)$$

donc  $d_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-n, q+n-1}$



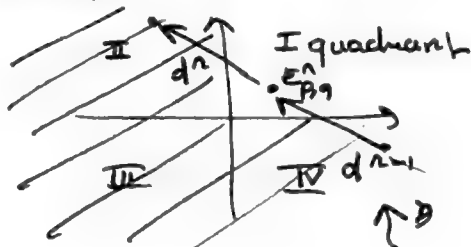
représentation graph :

Beaucoup d'argument concernant les suites spectrales sont purement géométriques et donnés par observation de la représentation graphique ci-dessus. Il arrive souvent que  $E_{p,q}^n$  soit nul sur toute une partie du plan, exemple pour  $p < 0$  ou  $q < 0$ .

Si  $F_p = \emptyset$ , lorsque  $p < 0$ ,  
 $H_n(F_p) = H_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$



si l'ordre de la diff.  $d^n$  est  $> p$ , on obtient 0.



Pour une suite spectrale du quadrant I, on a :

$\text{sup}(p, q)$ .

① a :  $n > p \Rightarrow d_{p,q}^n = 0$   
 $n > q-1 \Rightarrow d_{p+n, q-n+1}^n$

et  $n > \text{sup}(p, q-1) \Rightarrow E_{p,q}^n = E_{p,q}^{n+1}$

stationnaire à partir d'un certain rang.

Dans la situation ①, on pose  $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^n$  ( $n$  assez grand)

Théorème de convergence : Dans la situation  $\begin{cases} A_{p,q}^\infty = H_{p+q}(F_p) \\ E_{p,q} = H_{p+q}(F_p, F_{p-1}) \end{cases}$ , on notant

$$Gr_p(H_*(X)) = \frac{F_p H_*(X)}{F_{p+1} H_*(X)}$$

$$F_p H_*(X) = \text{Im}(H_*(F_p) \rightarrow H_*(\mathbb{R}^n X))$$

et avec l'hypothèse ①, on a  $\boxed{E_{p,q}^\infty = Gr_p(H_{p+q}(X))}$  = "gradué associé à l'homologie de  $X$ "

(ie si  $E_{p,q}^\infty$  est stationnaire pour  $n \rightarrow +\infty$ ,  $p, q$  fixé)

### Exemple : Homologie d'un CW-complexe

Un CW-complexe est un espace  $X = \bigcup X^{(p)}$ , réunion croissante, où

$$X^{(p+1)} = X^{(p)} \cup \left( \bigcup_{i \in I_{p+1}} e_i^{p+1} \right) \quad (\text{attachement selon le bord } \partial e_i^{p+1} \text{ des cellules})$$

$X^{(0)}$  discret

$$\partial_p : \bigcup S_i^p \rightarrow X^{(p)} = \text{application d'attachement}$$

muni de la topologie :  $U$  ouvert si son intersection avec toute cellule est un ouvert de la cellule

$$\bigcup e_i^{p+1} \rightarrow \text{Somme amalgamée} \\ X^{(p+1)} = X^{(p)} \cup \left( \bigcup e_i^{p+1} \right)$$

Une structure de CW-complexe :

muni d'une topo. canonique

est la donnée de cellules et d'opérations d'attachement de cellule selon le bord.

$$\text{ex: } \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \underbrace{S^1 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}}_{\text{hyperplan à l'infini}}$$

$$S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ attachement.}$$

CW-finie, qui sont compacts

$$\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \quad \text{topologie de la réunion} \quad (A \text{ fermé} \Leftrightarrow A \cap \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ fermé } \forall n)$$

CW de type fini : si  $I_{p+1}$  est un ensemble fini  $\forall p$

CW de dim finie :  $X^{(p)} = X$  si  $p$  assez grand.

## (C6) Homologie des fibrés

Il s'agit de fibrés localement triviaux  $p: E \rightarrow B: \forall b \in B \exists U \in \mathcal{O}_b$  ( $\mathcal{O}_b =$  ens. des vois. ouv. de  $b$  dans  $B$ ) tel que le diag. suiv. soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & p^{-1}(b) \times U \\ p \searrow & & \swarrow p_b \\ & U & \end{array}$$

Dans la pratique, on utilise essentiellement la propriété de relèvement des homotopies. On désigne par fibration une appl. continue  $p: E \rightarrow B$  telle que:

FIBRATION = (PRH) " Si  $F: X \times I \rightarrow B$  est une homotopie de  $f_0: X \rightarrow B$

à  $f_1: X \rightarrow B$ , et si  $f_0$  se relève en une appl. cont.  $g_0: X \rightarrow E$ , ( $p \circ g_0 = f_0$ )

alors  $\exists G: X \times I \rightarrow E$

qui relève  $F$ , i.e.  $p \circ G = F$  "

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{g_0} & E \\ \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Théorème: Si  $B$  est paracompact, une fibration locale (i.e.  $\forall b \exists U$   $p|_{p^{-1}(U)}: p^{-1}(U) \rightarrow U$  soit une fibration) est une fibration.  
vérifie PRH

Une projection d'un produit est une fibration, et donc une fibration locale triviale est une fibration.

ex: fibrations loc. triviale:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^{2n+1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \hookrightarrow & S^{4n+3} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^n(\mathbb{H}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \hookrightarrow & S^n \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{So } H, \text{ groupe de Lie de } G & H < G \\ & \downarrow \\ & G/H \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} SO(n) < SO(n+1) \\ & \downarrow \\ & S^n \end{array}$$



$$\text{ex: } \Omega X \hookrightarrow EX \subset \mathcal{C}([0,1], X)$$

$$EX = \{ \gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) / \gamma(1) = * \}$$

= espace contractible

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow p \\ & X \end{array} \quad p(\gamma) = \gamma(0)$$

$\Omega X =$  ens. des lacets en  $x$ .

ex :  $\mathcal{C}([0,1], X) \xrightarrow{(\omega(0), \omega(1))} X \times X$  ( $\omega(0)$  = évaluation en 0)  
 $x \xrightarrow{\gamma} x \mapsto (\gamma(0), \gamma(1))$  est une fibration de fibre  $\mathcal{C}X$ .

Supposons que  $B$  soit un CW-complexe :

$$E \xrightarrow{p} B = * \cup \bigcup_{e^1} V e^1 \cup \bigcup_{e^2} V e^2 \cup \dots \cup \bigcup_{e^k} V e^k \cup \dots$$

( $C_k$  = ensemble des indices des cellules de dimension  $k$ )

On a 1 filtration  $B^{(0)} = * \subset B^{(1)} \subset \dots \subset B^{(k)} \subset \dots$   $B^{(k+1)} = B^{(k)} \cup V e^{k+1}$   
 La structure du CW-complexe, ie la donnée des cellules et de l'attachement d'icelles permet de définir entièrement l'homologie de  $B$ .

$$H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)}) = H_*(\bigcup e^k, \bigcup S^{k-1}) \quad \text{coeff dans } \mathbb{Z}$$

excision

$$\oplus H_*(e^k, S^{k-1}) = \mathbb{Z}^{(C_k)}$$

On pose  $\mathcal{C}_k(B; \mathbb{Z}) \doteq H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)}) = \mathbb{Z}^{(C_k)}$

$$\begin{aligned} \partial : H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)}) &\xrightarrow{(-1)} H_*(B^{(k-1)}, B^{(k-2)}) \\ \partial : \mathcal{C}_k(B; \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(B; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(bord du triple  $B^{(k-2)} \subset B^{(k-1)} \subset B^{(k)}$ )

1)  $\partial$  est une différentielle

2)  $H_*(\mathcal{C}_*(B; \mathbb{Z}), \partial) = H_*(B; \mathbb{Z})$

NB :  $\partial$  est le bord d'un couple exact

$$\begin{cases} A_k = H_*(B^{(k)}) \\ E_k = H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)}) \end{cases}$$

$$H_n(B^{(k-1)}) \longrightarrow H_n(B^{(k)}) \longrightarrow H_n(B^{(k)}, B^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(B^{(k-1)}) \longrightarrow \dots$$

on pose  $\begin{cases} A_{p,q} = H_{p+q}(B^{(p)}) \\ E_{p,q} = H_{p+q}(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \end{cases}$  pour avoir un couple exact :

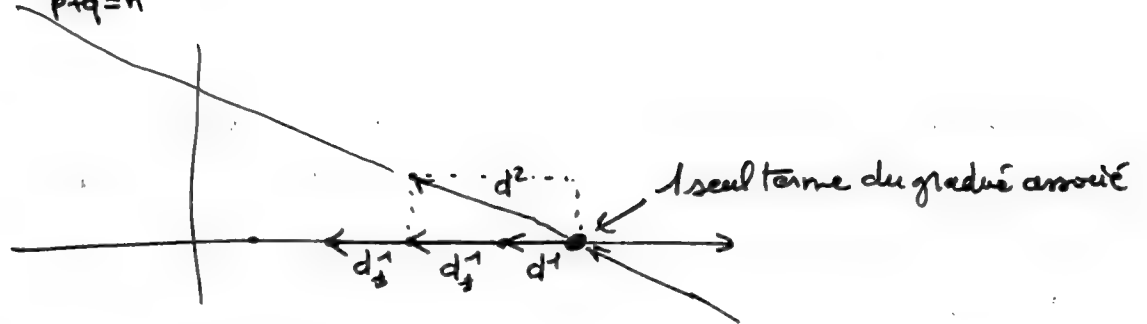
$$E_{p,q} = H_{p+q}(B^{(p)}, B^{(p-1)})$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(-1,-1)} & A \\ \uparrow \scriptstyle (-1,0) \quad \partial & & \downarrow \scriptstyle (0,0) \quad \delta \\ E & & E \end{array}$$

E de bord jkt

L'homologie du couple exact  $(A, E, i, j, \partial)$  est égal à l'homologie du CW-complexe.

On a calculé  $H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)})$  ...



$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(B^{(p)}, B^{(p-1)})$$

$$E_{p,q}^\infty = \frac{F_p H_{p+q}(B)}{F_{p-1} H_{p+q}(B)} \quad (\text{Th. des suites spectrales})$$

et le dessin donne  $E^2 = E_{p,q}^\infty$

$$\text{Donc } E^2 = E_{p,q}^\infty = \frac{F_p H_{p+q}(B)}{F_{p-1} H_{p+q}(B)} = \begin{cases} H_p(B) & \text{si } q=0 \\ 0 & \text{si } q \neq 0 \end{cases}$$

Cel: du 2) dernier,  $H_*(B; \mathbb{Z}) = H_*(\mathcal{C}(B; \mathbb{Z}), \partial)$

$$\begin{array}{ccc} & \parallel & \\ & E_{*,0}^\infty & \parallel \\ & & E_{*,0}^2 \end{array}$$

NB: En particulier, on obtient l'homologie de  $\mathbb{P}^n \mathbb{C} = \text{CW-complexes}$ .

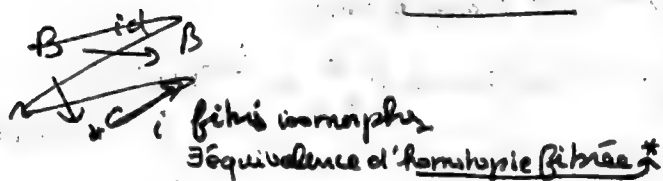
Retour:  $E = \bigcup E^{(k)} \quad \text{ou} \quad E^{(k)} = p^{-1}(B^{(k)})$



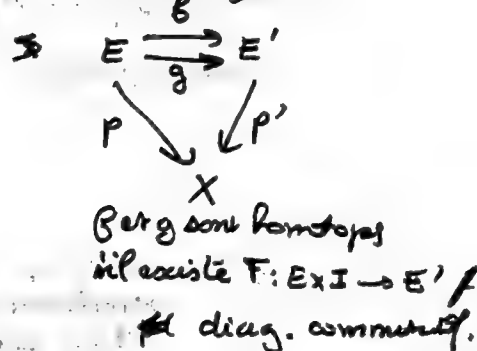
$$B = \bigcup_k B^{(k)} \quad \mathcal{C}(B) = H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)})$$

On obtient les suites spectrales  $(E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}))$  bigraduée homologique

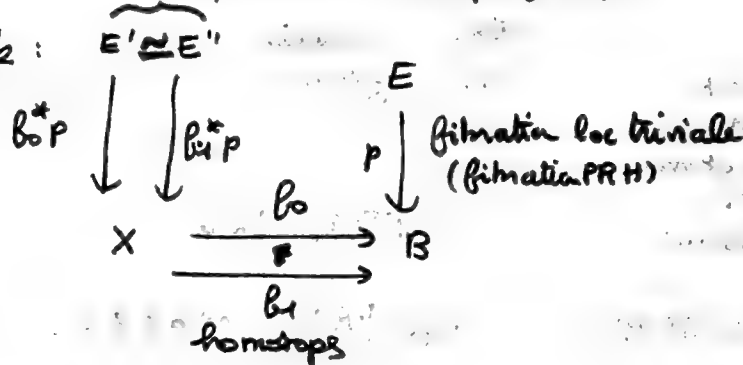
Donc Th(SS)  $E^\infty = \frac{F_p H_{p+q}(E)}{F_{p-1} H_{p+q}(E)}$



\* homotopie fibrée :

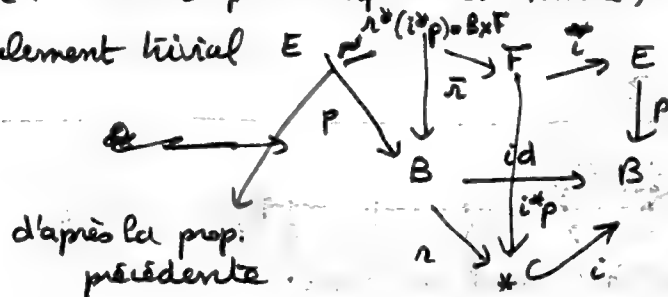


Rappels :  
Proposition :



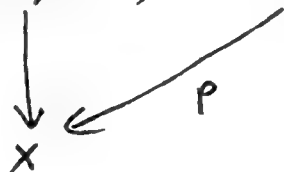
Corollaire : Si B est paracompact contractile, tout fibré  $p: E \rightarrow B$  de base B est localement trivial

preuve :



deformation rétraction de B sur 1 pt.

Gna:  $(E^{(p)}, E^{(p-1)}) \sim (B^{(p)}, B^{(p-1)}) \times F \leftarrow$  (couples de fibrés produits)



$$H_*(E^p, E^{p-1}) = H_*((B^{(p)}, B^{(p-1)}) \times F)$$

la formule de Künneth permet le calcul. Dans la plupart des calculs, on aura  $Tor(, ) = 0$

$$\begin{aligned} E_{p,q}^1 &= (H_*(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \otimes H_q(F))_{p+q} = H_p(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \otimes H_q(F) \\ &= \mathcal{C}_p(B) \otimes H_q(F) \\ &= \mathbb{Z}^{(c_p)} \otimes H_q(F) = H_q(F)^{(c_p)} \end{aligned}$$

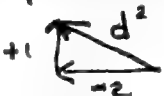
On pose  $\mathcal{C}(B; H_q(F)) = \mathcal{C}_p(B) \otimes H_q(F)$

vrai si  $\pi_1(B) = 0$

Citons :

Théorème : Si  $\pi_1(B) = 0$ , on a  $E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F))$ , pour n'importe quel anneau de coefficients R.

C'est une suite spectrale qui converge. C signifie que la différentielle est  $d^2$ , de degré  $(-2, +1)$  +1



$E_{p,q}^2$

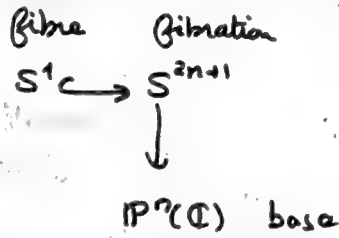
signifie que la différentielle est  $d^2$ , de degré  $(-2, +1)$  +1

vers  $H_{p+q}(E; \mathbb{R})$

Généralité  $E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F, R)) \Rightarrow H_{p+q}(E; R)$

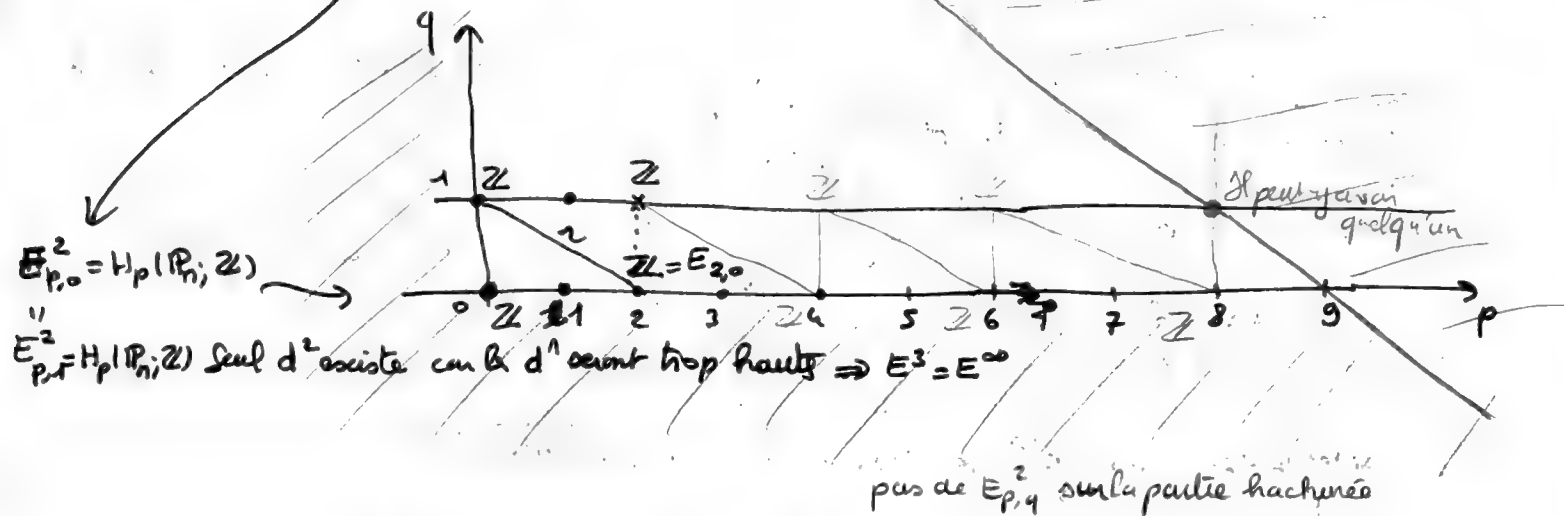
ce qui signifie :  $E_{p,q}^\infty = \text{cte si } n \gg 0 = E_{p,q}^\infty = \frac{F_p H_{p+q}(E)}{F_{p-1} H_{p+q}(E)}$

exemple :  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ( $n=4$ )  
 simplement connexe.  
 (cf. Van Kampen et nœud)  
 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$   
 $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0$



$E_{p,q}^2 = H_p(\mathbb{P}^n; H_q(S^1, \mathbb{R}))$

$H_q(S^1, \mathbb{R}) = 0$  si  $q \neq 1, 0$ .





$$E \supset p^{-1}(B^{(n)}) \cong E^{(n)} \quad B = \text{CW-complexe}$$

$$\downarrow p$$

$$B \supset B^{(n)} \supset B^{(n-1)}$$

filtration  
can. du CW-compl

$$B^{(n-1)} \cup \bigcup_{i \in J_n} e_i^n = B^{(n)}$$

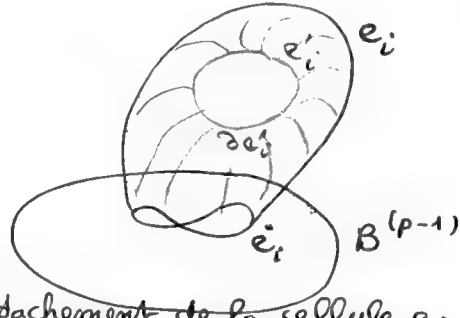
$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = B^{(0)} \\ F = p^{-1}(k_0) = E^{(0)} \end{array} \right.$$

$$A_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^{(p)})$$

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)})$$

$$\Downarrow \text{converge}$$

$$E_{p,q}^\infty = \frac{F_p H_{p+q}(E)}{F_{p-1} H_{p+q}(E)}$$



$f_i : \partial e_i \rightarrow B^{(p-1)}$  est l'opération d'attachement de la cellule  $e_i$

On pose  $\dot{e}_i = f_i(\partial e_i)$

On a l'inclusion :  $(e_i, \dot{e}_i) \hookrightarrow (B^{(p)}, B^{(p-1)})$

On prenant l'image réciproque par  $p$ , on obtient l'inclusion

$$(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\dot{e}_i)) \hookrightarrow (E^{(p)}, E^{(p-1)})$$

d'où une application  $\bigcup_i (p^{-1}(e_i), p^{-1}(\dot{e}_i)) \rightarrow (E^{(p)}, E^{(p-1)})$  qui induit

une application entre groupes d'homologie :

$$\bigoplus_{i \in J_p} H_n(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\dot{e}_i)) \xrightarrow{\gamma} H_n(E^{(p)}, E^{(p-1)})$$

lemme 1 :  $\gamma$  est un isomorphisme.

preuve

Soit  $e_i'$  une boule fermée incluse dans  $e_i$ , de bord  $\partial e_i'$ . Alors :

1)  $B^{(p-1)} \cup (e_i \setminus e_i')$  se rétracte par déformation sur  $B^{(p-1)}$

2)  $(\partial e_i, \partial e_i') \hookrightarrow \partial e_i$ ,

$(e_i, \dot{e}_i) \hookrightarrow (e_i, e_i \setminus e_i')$  est une équivalence d'homotopie

$\uparrow$  excision de  $e_i \setminus e_i'$

$$(e_i', \partial e_i')$$

De même avec  $p^{-1}(B^{(p-1)})$

Poursuite :

$$\begin{array}{ccc}
\oplus H_n(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\dot{e}_i)) & \xrightarrow{\gamma} & H_n(E^{(p)}, E^{(p-1)}) \\
\downarrow \simeq \text{(homotopie)} & & \downarrow \text{induit par l'inclusion} \\
& & \simeq \text{axiome d'homotopie} \\
\oplus H_n(p^{-1}(e_i), p^{-1}(e_i \setminus \dot{e}_i)) & \longrightarrow & H_n(E^{(n)}, E^{(n)} \setminus \bigcup p^{-1}(\dot{e}_i)) \\
\uparrow \simeq \text{excision} & & \uparrow \simeq \text{excision} \\
\oplus_{i \in J_p} H_n(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\partial e_i)) & \xrightarrow{=} & H_n\left(\bigcup_{i \in J_p} (p^{-1}(e_i), p^{-1}(\partial e_i))\right)
\end{array}$$

CQFD

La fibration  $p$  est ~~local~~ triviale sur  $e_i$  car la base est contractible :

$$\begin{array}{ccc}
e_i \times F & \xrightarrow{\sim} & p^{-1}(e_i) \\
& \searrow p_1 & \downarrow p \\
& & e_i \\
& & \text{contractible}
\end{array}$$

Donc  $H_*(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\partial e_i)) = H_*(e_i \times F, \partial e_i \times F) = H_{n-p}(F)$   
(Künneth)

puisque  $H_*(e_i, \partial e_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc  $\oplus_{i \in J_p} H_n(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\partial e_i)) = \oplus_{i \in J_p} H_{n-p}(F) = (H_{n-p}(F))^{(J_p)}$

Donc :  $E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}) = \underbrace{H_p(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \otimes H_{n-p}(F)}_{?} \simeq \mathcal{C}_p(B; H_{n-p}(F))$

Th r me : Si la fibration est orient ble, le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
H_p(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \otimes H_q(F) & \xrightarrow{\Psi_{p,q}} & H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}) = E_{p,q}^1 \\
\partial^1 \otimes \text{id}_{H_q(F)} \downarrow & & \downarrow d^1 \\
H_{p-1}(B^{(p-1)}, B^{(p-2)}) \otimes H_q(F) & \xrightarrow{\Psi_{p-1,q}} & H_{p+q-1}(E^{(p-1)}, E^{(p-2)}) = E_{p-1,q}^1
\end{array}$$

Alors :  
~~Donc~~  $H_p(B; H_q(F)) \simeq E_{p,q}^2$  (Sene)  
 (où  $d^1 = \text{jok}$ )

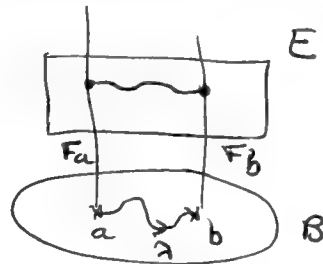
idées de la démonstration :

Fibration orientable :

Une fibration  $p: E \rightarrow B$  est une application continue qui possède la propriété PRH de relèvement des homotopies. Elle relève donc les chemins, et en fait :

$p$  est une fibration si  $\exists \Lambda: W \rightarrow E$   $W = E \times_B B^I = \{(x, \lambda) \in E \times B^I / p(x) = \lambda(0)\}$   
 $I = [0, 1]$  telle que  $\begin{cases} \Lambda(x, \lambda)(0) = x \\ \forall t \quad p(\Lambda(x, \lambda)(t)) = \lambda(t) \end{cases}$

$f_\lambda: F_a \rightarrow F_b$  s'appelle une  
 $x \mapsto \Lambda(x, \lambda)(1)$



application admissible

La classe d'homotopie  $[f_\lambda]$  ne dépend que de  $[\lambda]$  (et non de  $\Lambda$ )

Définition : Une application  $f: F_a \rightarrow F_b$  est admissible s'il existe  $[\lambda] \in \pi(a, b)$  tel que  $[f] = [f_\lambda]$ .

- 1) La composée de 2 appl. admissible en est une
- 2) Toute application admissible est une équivalence d'homotopie et son inverse est admissible
- 3) Si  $B$  est connexe par arcs, il existe une application admissible entre 2 fibres  $F_a$  et  $F_b$  quelconques.
- 4) Si  $f$  est admissible,  $(f_\lambda)_*: H_*(F_a) \rightarrow H_*(F_b)$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\lambda$ .

Définition : On dit que la fibration  $p: E \rightarrow B$  de base  $B$  connexe par arcs est orientable si  $\exists b$  (ou  $\forall b$ )  $\forall \omega \in \pi_1(B, b)$   $(f_\omega)_* = \text{id}_{H_*(F_b)}$

Si la fibration est orientable et si  $f$  est admissible,  $f_*: H_*(F_a) \rightarrow H_*(F_b)$  ne dépend pas de  $[\lambda]$ . On peut donc identifier canoniquement les groupes d'homologie des fibres  $H_*(F_b)$ .

Proposition : Si  $\pi_1(B) = 0$ , toute fibration est orientable.

Définition : Relèvement admissible d'une application

$$\begin{array}{ccc} X \times F & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & E \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

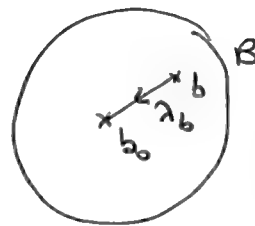
Soit  $p: E \rightarrow B$  une fibration et  $\alpha: X \rightarrow B$  continue, soit  $b_0 \in B$  et  $F = p^{-1}(b_0)$ . On suppose  $B$  connexe.

$$\forall x \in X, F \xrightarrow{\tilde{\alpha}_x} p^{-1}(\alpha(x)) = F_{\alpha(x)} \\ z \mapsto \tilde{\alpha}(x, z)$$

$\tilde{\alpha}$  est un relèv. admissible de  $\alpha$  si  $\forall x$   $\tilde{\alpha}_x$  est admissible, où  $\tilde{\alpha}_x$  est défini ci-contre :

ex : Si  $B$  contractile sur  $b_0$ ,

$$\begin{array}{ccc} B \times F & \xrightarrow{\beta} & E \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$



$\gamma_b$  = chemin de la contraction

$\Lambda$  = fonction de relèvement de chemin pour  $p$

$$\beta(b, \gamma) = \Lambda(\gamma, \gamma_b)(1) = \beta_{\gamma_b}(\gamma)$$

Proposition : Si la fibration est orientable et si  $\alpha : X \rightarrow B$  admet un relèvement admissible, l'application

$$\begin{array}{ccc} H_*(X) \otimes H_*(F) & \xrightarrow{\bar{\alpha}_*} & H_*(E) \\ \downarrow k = \text{K\"unneth} & \nearrow \bar{\alpha}_* & \\ H_*(X \times F) & & \end{array}$$

ne dépend que de  $\alpha$  (et non du relèvement)

(en exercice)

Corollaire : Si la fibration est orientable,  $\Psi_{p,q}$  ne dépend que de la structure du CW-complexe  $B$ .

preuve :  $\Psi_{p,q}$  est du type du  $\bar{\alpha}_*$  de la prop. ci-dessus.

Comme  $\Psi_{p,q}$  est naturelle, le diagramme du Th p 40 commute.

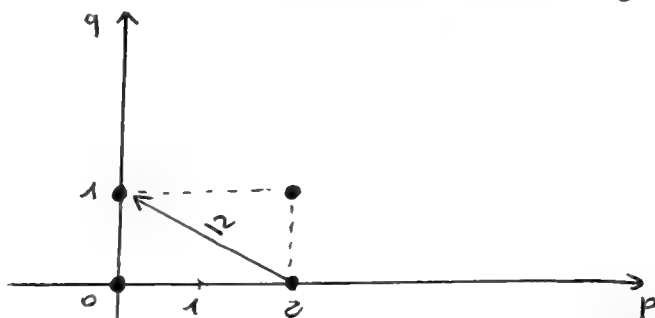
exemple: suite spectrale de la fibration de Hopf

$$S^1 \longrightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$$

$$\downarrow$$

$$S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$E_{p,q}^2 = H_p(S^2; H_q(S^1)) \text{ d'après le Th. préc. } = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } (p,q) \in \{0,2\} \times \{0,1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



$E^3 = E^\infty$  car  $d^3$  tombe toujours sur 0.

Remarque: L'isomorphisme  $H_p(B; H_q(F)) \xrightarrow{\sim} E_{p,q}^2$  est naturel, ie

Si j'ai  
un  
morphisme  
de fibration  
or  
si  $f$  est cellulaire (ie  $B, B'$  cw-complexes  
et  $f$  envoie 1 cellule sur 1 cellule)

$$\begin{array}{ccc} F' & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \xrightarrow{f} & E \\ P' \downarrow & & \downarrow P \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

alors:

$$\begin{array}{ccc} H_p(B; H_q(F)) & \xrightarrow{\sim} & E_{p,q}^2(p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_p(B'; H_q(F')) & \xrightarrow{\sim} & E_{p,q}^2(p') \end{array}$$

est commutatif.

Si  $E_n \longrightarrow S^3$

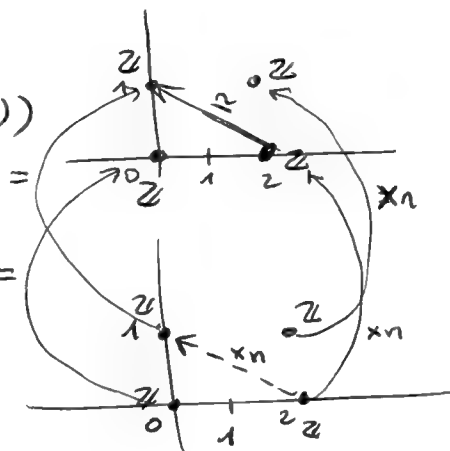
$n \neq 0$   $\downarrow$   $\downarrow H = \text{fib. de Hopf}$

$S^2 \xrightarrow{\times n} S^2$

$\downarrow$   $\nwarrow$  même

$E_{p,q}^2 = H_p(S^2; H_q(S^1))$

calculer l'homologie de  $E_n$ ? On utilise la naturalité de la suite spectrale.

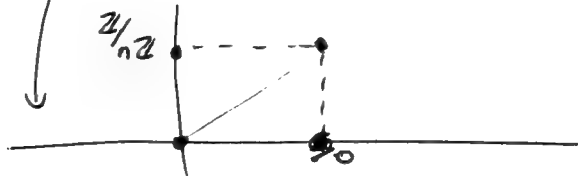


car  $H_0(S^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_0(S^2, \mathbb{Z})$

$H_2(S^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\times(n)]{\sim} H_2(S^2, \mathbb{Z})$

$E_{p,q}^3$

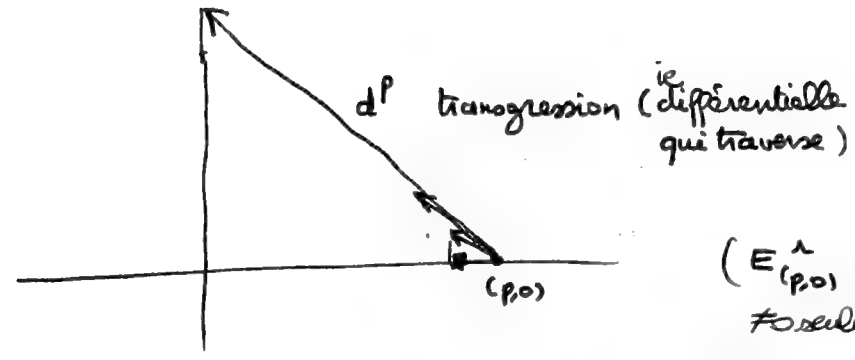
au niveau 3



Donc  $\begin{cases} H_0(E_n) = \mathbb{Z} \\ H_1(E_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ H_2(E_n) = 0 \end{cases} \quad H_3(E_n) = \mathbb{Z}$

Fibration:

$$F \rightarrow E \downarrow P B$$



( $E_{(p,0)}^\wedge$  suites de coins)   
  $\neq$  seulement au les axes de coordonnées

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(E) \text{ converge.}$$

$$E_{p,0}^2 \supset E_{p,0}^3 \supset E_{p,0}^4 \supset \dots \supset E_{p,0}^P \supset E_{p,0}^{P+1} = \text{Ker } d^P = E_{p,0}^\infty = \frac{F_p H_p(E)}{F_{p-1} H_p(E)}$$

Donc  $H_p(E) \xrightarrow{\frac{F_p H_p(E)}{F_{p-1} H_p(E)}} \frac{F_p H_p(E)}{F_{p-1} H_p(E)} = E_{p,0}^\infty \subset E_{p,0}^{2} = H_p(B; H_0(F; R))$

$\cap_{n=2}^P \text{Ker } d^n$   
 $H_p(p; R)$

$H_p(B; R)$

$$H_0(F; R) \rightarrow R = H_0(x; R) \text{ induit par } F \rightarrow *$$

$\parallel$   
 $R(\pi_0(F))$

Théorème : le diag. 1 est commutatif

preuve:  $\xrightarrow{\text{identification de coins.}}$

$$\begin{array}{ccc} F & \rightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{P} & B \\ P \downarrow & & \parallel \\ B & \rightarrow & B \end{array}$$

Suite spectrale associée à cette fibration:

$$\begin{cases} E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(x)) \\ E_{p,q}^2 = 0 \text{ si } q \neq 0 \end{cases}$$

La naturalité de la suite spectrale à cette situation donne :



$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F)) \xrightarrow{\varphi_{p,q}^2} H_p(B; H_q(F)) = E_{p,q}^2$$

$$\xrightarrow{H_p(p; R)} H_p(B; H_0(F)) \xrightarrow{\varphi_{p,0}^2} H_p(B; H_0(x))$$

$$H_p(B; H_0(F)) \xrightarrow{\varphi_{p,0}^2} H_p(B; H_0(x))$$

$$\begin{array}{c} \cup \\ E_{p,0}^3 \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ E_{p,0}^\infty \end{array} \rightarrow \dots$$

$$H_p(E) \rightarrow \frac{F_p H_p(E)}{F_{p-1} H_p(E)} \xrightarrow{P_*} \frac{F_p H_p(B)}{F_{p-1} H_p(B)} \xrightarrow{\parallel} H_p(B)$$

(on fait de même pour  $E_{p,q}^2 = 0$  si  $p \neq 0$ )

et avec  $\begin{array}{ccc} F & \rightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow P \\ B & \rightarrow & B \end{array}$

En cohomologie ? On considérera la fibration  $p: E \rightarrow B$  et les filtrations

$$\begin{array}{ccc} F & \rightarrow & E \supset E^{(k)} = p^{-1}(B^{(k)}) \\ & & \downarrow p \quad \downarrow \\ & & B \supset B^{(k)} \end{array}$$

pour obtenir le couple exact  $H_{p+q}(E^{(p-1)}) \longrightarrow H_{p+q}(E^{(p)})$  (écrite  $H_{p+q}(E^{(p)})$  !)

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ & (-1) \partial & \\ & H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}) & \end{array}$$

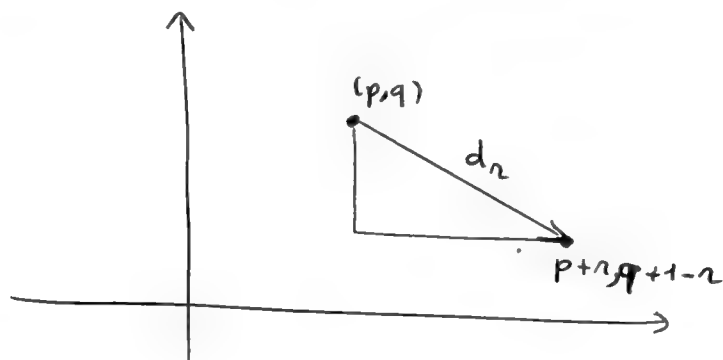
Du :  $H_{p+q}^{*}(E^{(p)}) \xrightarrow{i} H_{p+q}^{*}(E^{(p-1)})$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow k & \searrow \partial \\ (\infty, \infty) & & (+1, 0) \\ & H_{p+q}^{*}(E^{(p)}, E^{(p-1)}) & \end{array}$$

$(F^p H^{p+q}(E) = \ker j_B^{(p)})$   
 $H^{p+q}(E, E^{(p)}) \rightarrow H^{p+q}(E) \xrightarrow{j^{(p)}} H^{p+q}(E^{(p)})$   
 donc  $F^p \supset F^{p+1}$  ...  
 on aura donc de filtrations descendantes)

$E_{n-1}^{p,q} = H^{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)})$

$n$  est d'ordre de la suite spectrale  
 $d_n$  = différentielle au rang  $n = j_n \circ k_n$  où  $j_n = j \circ i^{1-n}$   
 donc le degré de  $d_n$  est  $(n, 1-n)$



$d_2$  at  $(2, -1)$

Il existe une structure d'algèbre sur toute la suite spectrale  $E_n^{p,q}$   $n \geq 2$ .  
 C'est une structure d'algèbre bigraduée pour laquelle les différentielles sont des dérivations.

**Théorème (admis) :**  $E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; R))$  si la fibration est orientable  
 où  $R$  est un anneau (ie une  $\mathbb{Z}$ -algèbre)

$$H^p(B, H^q(F)) \otimes H^{p'}(B, H^{q'}(F))$$

$$\downarrow \cup$$

$$H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F))$$

est défini grâce à l'application bilinéaire :

$$H^q(F; R) \otimes H^{q'}(F; R) \xrightarrow{\cup} H^{q+q'}(F; R) \text{ est le cup-produit pour } F$$

[(\*) le produit d'un él de  
 indice  $(p, q)$  avec  $(p', q')$   
 est d'indice  $(p+p', q+q')$ ]

De plus, la différentielle est une dérivation

$$\forall a \in H^p(B, H^q(F))$$

$$\forall b \in H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \quad d_2(a \cup b) = (d_2 a) \cup b + (-1)^{p+q} a \cup d_2 b$$

donc  $E_2^{*,*}$  est une algèbre différentielle bigraduée, donc  $E_3^{*,*} = H(E_2, d_2)$  est une algèbre bigraduée avec  $d_3$  induite par  $d_2$ , etc...

$E_n^{*,*}, d_n$  est une alg. diff. bigraduée.  $E_\infty$  est une alg. bigraduée qui est le gradué associé à  $H^*(E)$  laquelle est munie d'une filtration d'algèbre.

On dit que l'algèbre  $A$  est filtrée si  $F^p A \supset F^{p+1} A \supset \dots$  est une filtration descendante telle que  $F^p A \cdot F^q A \subset F^{p+q} A$

(NB: les séries formelles forment 1 algèbre, graduée par la valuation  $v(\sum_{i=p}^{\infty} a_i x^i) = p$  si  $a_p \neq 0$ , et le gradué associé n'est autre que l'ens. des polynômes)

Ex

Exemples d'application:

$$1^\circ) H^*(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$$

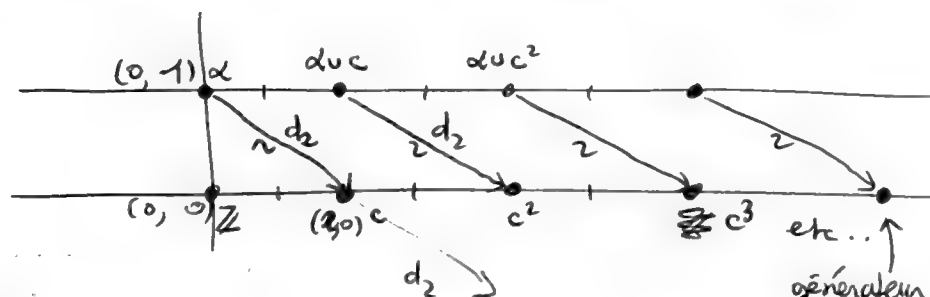
$$S^1 \rightarrow S^\infty \sim *$$

$$\downarrow$$
  

$$\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$$

$$H^p(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}); H^q(S^1; \mathbb{R}))$$

$$E_2^{p+q}(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), H^q(S^1, \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(S^\infty) = \mathbb{Z}_{(0,0)}$$



$$d_2 \alpha = c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in H^0(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}); H^1(S^1)) = \text{pts loc. constantes de } \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) \rightarrow H^1(S^1) \\ c \in H^2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}); H^0(S^1)) = \text{pts} \end{array} \right.$$

donc  $\alpha u c \in H^2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}); H^1(S^1))$  est un générateur de

$$d_2(\alpha u c) = \alpha u d_2 c \pm \alpha u c d_2 c$$

$$d_2(\alpha u c) \equiv c^2$$

etc...

$$\text{ccl} \quad H^n(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$H^n(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}); \mathbb{R}) = H^n(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{R}$$

on note

$$H^*(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c] \quad \text{ou} \quad |c| = 2$$



De même,

$$S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{P}^n \mathbb{C}$$

$$S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$$

$$(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) \downarrow$$

$$\text{Gén. } [z_0, \dots, z_n] \quad \mathbb{P}^n \mathbb{C} = (\mathbb{C}^{n+1})^* / \sim$$

$$z_i = x_i + iy_i$$

$$H^*(\mathbb{P}^n \mathbb{C}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c] / (c^{n+1} = 0)$$

Et  $j: \mathbb{P}^n \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$  inclusion can., induit en cohomologie la surjection canonique:

$$j^*: H^*(\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbb{P}^n \mathbb{C}; \mathbb{Z})$$

De même  $H^*(\mathbb{P}^\infty \mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[w] \quad (\text{où } w \in H^1)$

29

### Espaces d'Eilenberg - Mac Lane

admis  $\parallel$   $G = \text{groupe abélien}$ , Pour tout  $n$ , il existe un espace  $K(G, n)$  (en fait un <sup>seul</sup> type d'homotopie) tel que

$$\pi_i(K(G, n)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ G & \text{si } i = n \end{cases}$$

(où  $K(G, n)$  est un CW-complexe)

$$K(\mathbb{Z}; 1) = S^1 \quad (\text{car } \pi_i(S^1) = \mathbb{Z} \text{ si } i=1)$$

$$K(\mathbb{Z}; 2) = \mathbb{P}^\infty \mathbb{C} \longrightarrow \text{cf revêtement}$$

$$\cancel{K(\mathbb{Z}; 3)}$$

$$K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{P}^\infty \mathbb{R} \longrightarrow \text{mêm genre.}$$

$$S^1 \longrightarrow S^\infty$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$$

et suite ex. Paire d'homotopie.

$$\mathbb{P}^1 \mathbb{C} = S^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$$

$$[X, K(G, n)] \longrightarrow H^n(X; G)$$

$$\beta \longmapsto \beta^*(id)$$

Théorème Borewick:

$$H_i(K(G, n)) = \pi_i(K(G, n)) = \begin{cases} 0 & i < n \\ G & i = n \end{cases}$$

pour  $i \leq n$

$$\beta^*: H^n(K(G, n); G) \xrightarrow{id} H^n(X; G)$$

$$id \longmapsto \beta^*(id)$$

$$H^n(K(G, n); G)$$

$$\downarrow \cong iso$$

th. des coeff. universels

$$id \in \text{Hom}(G, G) \text{ car } H_n(K(G, n)) = G$$

Théorème : d'application  $[X, K(G, n)] \xrightarrow{\sim} H^n(X; G)$  est  
 un ~~isomorphisme~~ bijection naturelle en  $X$ .

On peut donc munir  $[X, K(G, n)]$  d'une structure de groupe canonique, naturelle en  $X$ .

exercice :  $S^2 = \mathbb{P}^1 \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$   
 fibre  $F$  (où encore, ce qui revient presque au même :  
 $S^2 \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  défini par  $[S^2, K(\mathbb{Z}, 2)] = H^2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ni 1$ )

Calculer la cohomologie de  $F$ .

(On peut calculer  $\pi^4(S^3)$  grâce à  $S^3 \hookrightarrow \mathbb{S} \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$ )

preuve du théorème :

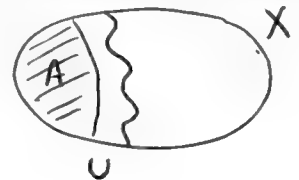
(cf Spanier : corollaire de la théorie d'obstruction)

Autre méthode : Posons  $H^n(X; G) = [X^+, K(G, n)]$  ( $X^+$  = espace  $X$  pointé.)

si  $n=0$   $\left\{ \begin{array}{l} K(G, 0) \cong G \text{ muni de la topologie discrète} \\ [X, G] = \mathcal{C}(X, G) = G^{\pi_0(X)} = H^0(X; G) \end{array} \right.$

Posons  $H^n(X, A; G) = [X/A, K(G, n)]$  pour  $A$  cofibration ( $A$  possède un voisinage  $U$  dans  $X$  qui se rétracte par déformation sur  $A$ )  
 On convient d'appeler  $X \cup * = X/\emptyset$  où si l'on veut par déf.

on a :

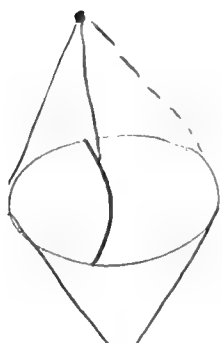
$$\begin{array}{ccc} A \hookrightarrow X & \emptyset \longrightarrow X \\ \downarrow & \downarrow \\ * \longrightarrow X/A & * \longrightarrow X \cup * \cong X/\emptyset \\ \text{def de } \downarrow & \text{réunion} \\ & \text{amalgamée} \end{array}$$


Définissons :

$$\begin{aligned} H^n(X, A; G) &\xleftarrow{\partial} H^{n-1}(A; G) \\ [X/A; K(G, n)] &\xleftarrow{\partial} [A, K(G, n)] \end{aligned}$$

(classes d'homotopies pointées)

$$A \xrightarrow{i} X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A = \text{suspension de } A$$



$\uparrow \eta$   
 $C_i \longrightarrow$   
 cône de l'application  $i$

$$\text{On a: } A \hookrightarrow X \rightarrow X/A \rightarrow \Sigma A$$

$$\forall Z \quad [A, Z] \leftarrow [X, Z] \leftarrow [X/A, Z] \leftarrow [\Sigma A, Z] = [A, \Omega Z]$$

$$\text{où } \Omega K(G, n) = K(G, n-1) \\ \text{si } Z = K(G, n)$$

d'où  $\partial$ .

~~2~~ 1) Exactitude:

$$A \hookrightarrow X \rightarrow X/A \rightarrow \Sigma A \rightarrow \Sigma X \rightarrow \Sigma(X/A) \rightarrow \Sigma^2 A \rightarrow \dots \\ [A, K(G, n)] \leftarrow [X, K(G, n)] \leftarrow [\Sigma X/A, K(G, n)] \text{ etc } \dots$$

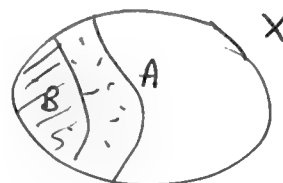
$$\text{car } [\Sigma X, K(G, n)] = [X, \Omega K(G, n)] = [X, K(G, n-1)] = H^{n-1}(X; G)$$

2) Homotopie (triviale)

$$3) \text{ Excision: } B \subset A \subset X \quad \bar{B} \subset \bar{A} \quad \text{Alors } X/A \simeq X \setminus B / A \setminus B.$$

4) Dimension:

~~5~~  $\mathbb{Z}_2$ ,



$h^n$  satisfait les axiomes d'Eilenberg - Steenrod donc définit la théorie de la cohomologie unique. Il faudrait vérifier que  $\mathbb{Z}_2$  le morphisme de th. est bien l'isomorphisme entre  $h^n$  et  $H^n$

CPFD

Méthode du maître des groupes d'homotopie (1953: Cartan-Serre)

(Hyp: On sait calculer  $H_n(X)$  mais pas  $\pi_n(X)$ )

$X = \text{espace } (n-1)\text{-connexe } (n \geq 2)$   
 Th. Hurewicz  $\Rightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$  est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \beta &\xrightarrow{\beta^*(\text{id})} \beta^*(\text{id}) \\ \text{Rappel: } [X, K(G, m)] &\xrightarrow{\cong} H^m(X; G) \\ \text{(d'après Künneth Th. C.U.) } H^m(K(G, m); G) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}(H_m(K(G, m), G) \cong \underbrace{\text{Hom}(G, G)}_{\text{id}} \end{aligned}$$

Par abus,  $\text{id} \in H^m(K(G, m); G)$   
 Posons  $\pi_n = \pi_n(X)$ . D'après le th. des C.U. (coeff. univ.)

$$\begin{aligned} H^n(X; \pi_n) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}(H_n, \pi_n) = \text{Hom}(\pi_n, \pi_n) \quad \text{car } \pi_n = H_n \\ \parallel & \\ [X, K(\pi_n, n)] &\xrightarrow{\Phi \text{ isomorphisme}} \text{Hom}(\pi_n, \pi_n) \\ \beta &\xrightarrow{\beta^*(\text{id})} \beta^*(\text{id}) \end{aligned}$$

On choisit  $\text{id}_{\pi_n} \in [X, K(\pi_n, n)]$  en identifiant  $[X, K(\pi_n, n)]$  et  $\text{Hom}(\pi_n, \pi_n)$  par  $\Phi$ .

$$X \langle n \rangle \xrightarrow{\text{id}_{\pi_n}} X \xrightarrow{\text{id}_{\pi_n}} K(\pi_n, n)$$

Fibre de  $\text{id}_{\pi_n} = "X \text{ rendue } n\text{-connexe}"$ .

La suite exacte d'homotopie donne  $\begin{cases} \pi_i(X \langle n \rangle) = \pi_i(X) & i > n \\ \pi_i(X \langle n \rangle) = 0 & \text{si } i \leq n \end{cases}$

Alors, d'après le Th. d'Hurewicz  $\pi_{n+1}(X \langle n \rangle) = H_{n+1}(X \langle n \rangle)$ , donc  $\boxed{\pi_{n+1}(X) = H_{n+1}(X \langle n \rangle)}$

ex: Calcul de  $\pi_4(S^3)$

On a montré que  $S^2 \langle 2 \rangle \sim S^3$  ("homotopiquement équivalent à")

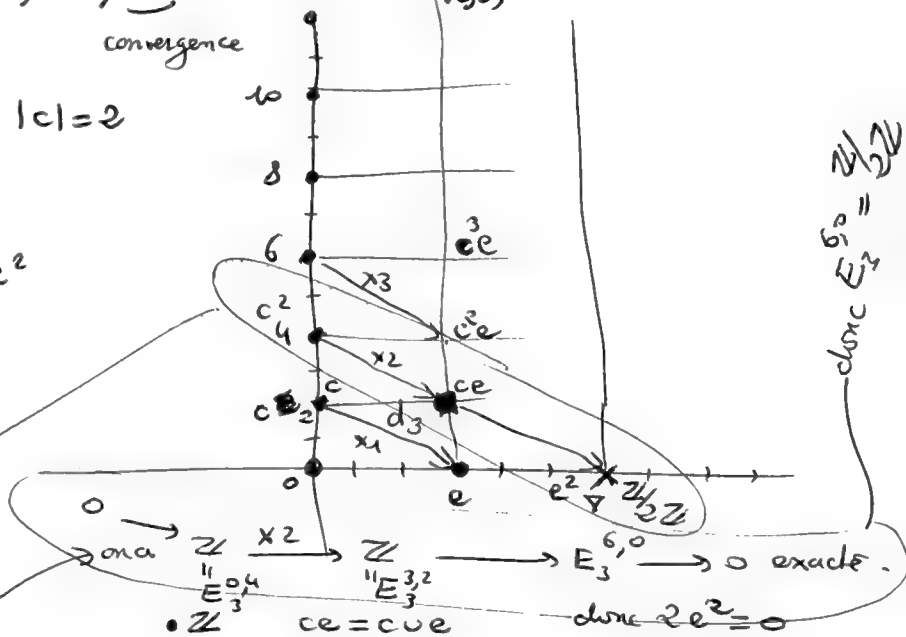
$$S^3 \langle 3 \rangle \rightarrow S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$$

$$\Omega K(\mathbb{Z}, 3) = K(\mathbb{Z}, 2) \xrightarrow{\text{cohomologie connue}} * \xrightarrow{\text{trouver sa cohomologie}} K(\mathbb{Z}, 3)$$

$$E_{p,q}^2 = H^p(K(\mathbb{Z}, 3); H^q(K(\mathbb{Z}, 2))) \Rightarrow H^{p+q}(*) = \mathbb{Z}_{(0,0)}$$

$$\begin{cases} K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{P}^\infty \mathbb{C} \text{ connu.} \\ H^*(K(\mathbb{Z}, 2)) = \mathbb{Z}[c], |c|=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d_3(c^n) &= n c^{n-1} d_3 c = n c^{n-1} e \\ d_3(ce) &= (dc) \cdot e + c \cdot \underbrace{(de)}_0 = e^2 \end{aligned}$$



Cette suite est exacte sinon il viendrait quelque chose en  $\nabla$  qui ne pourrait pas disparaître ensuite.

donc  $E_3^{6,0} = 2\mathbb{Z}$

( $d_4 = 0$  car  $d_4$  est définie sur le noyau de  $H_{33}(d_3, -)$ )

Alors  $H^c(K(\mathbb{Z}, 3)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } c=3 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } c=6 \\ 0 & \text{si } c=1, 2, 4, 5 \end{cases}$

Admis/

(Tous les groupes d'homologie qui interviennent sont des groupes abéliens de type fini)

$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(K), \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(K(\mathbb{Z}, 3)) \rightarrow \text{Hom}(H_n(K(\mathbb{Z}, 3))) \rightarrow 0$  } Th. C.U.

donc Th. C.U.

d'où l'intérêt de cette formule.

NB

alors  $G = \mathbb{Z}^r \oplus F$  abélien  
libre fini

$\Downarrow$

$\begin{cases} \text{Hom}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r \text{ libre} \\ \text{Ext}(G, \mathbb{Z}) = F \text{ fini} \end{cases}$

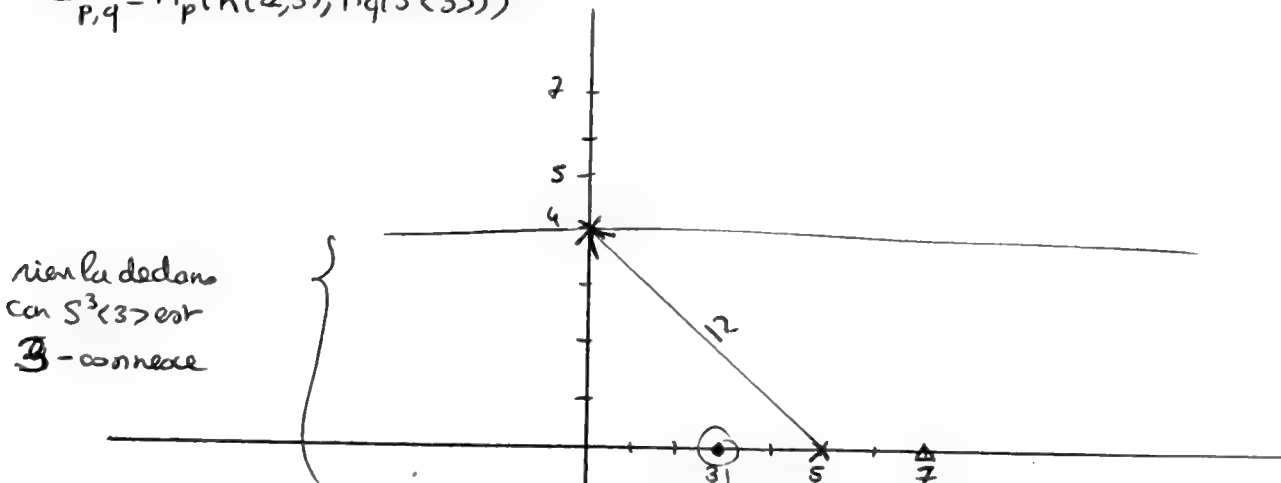
$H^n(K) = (\text{Partie libre de } H_n(K)) \oplus (\text{Partie finie de } H_{n-1}(K))$ , d'après la remarque

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$H^n$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$H_n$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\text{Tor } H^7 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	0	0

$\bigcirc = H_n^{\text{not engendrée par}}$   
 (1)  $\nearrow$  partie finie  $\uparrow$  partie libre  
 (2)  $\nearrow$  partie finie  $\uparrow$  partie libre  
 (3)  $\nearrow$  partie finie  $\uparrow$  partie libre  
 (4)  $\nearrow$  partie finie  $\uparrow$  partie libre  
 (5)  $\nearrow$  partie finie  $\uparrow$  partie libre  
 (6)  $\nearrow$  partie finie  $\uparrow$  partie libre

Suite spectrale de  $S^3 \hookrightarrow S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$  (Homologie)

$E_{p,q}^2 = H_p(K(\mathbb{Z}, 3); H_q(S^3 \hookrightarrow S^3))$



Donc  $H_4(S^3 \hookrightarrow S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(NB:  $\pi_5(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

homologie  $H_3$  elle doit rester seule

3  $\bullet = \mathbb{Z}$  en homologie  
 5  $\times = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$   
 7  $\triangle = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Cohomologie de  $K(\mathbb{Z}, 3)$  : Compliquée, de la  $p$ -torsion pour tous les  $p$ , facteurs libres plus loin?

Problème : rang de  $H_*(K(\mathbb{Z}, 3))$  ? Torsion de  $H_*(K(\mathbb{Z}, 3))$  ? Déterminer  $\inf \{ n / \text{Tor}_p(H_n(K(\mathbb{Z}, 3))) \neq 0 \}$  ?  $\sup \text{Exp}_{(p)} H_n(K(\mathbb{Z}, 3))$

où  $H_n(K(\mathbb{Z}, 3)) = \bigoplus_{(p)} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$  le plus grand  $n$  qui apparaît (pour premier  $p$ ).

(Réponse : il n'y a que de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  dans la torsion de  $H_n(K(\mathbb{Z}, 3))$ ).

Pour un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini écrit sous forme canonique  $\mathbb{Z}^r \oplus F$  où  $F$  est la torsion, on a :

$$(\mathbb{Z}^r \oplus F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^r$$

ce qui permet de calculer facilement le rang  $r$  de  $\mathbb{Z}^r \oplus F$ .

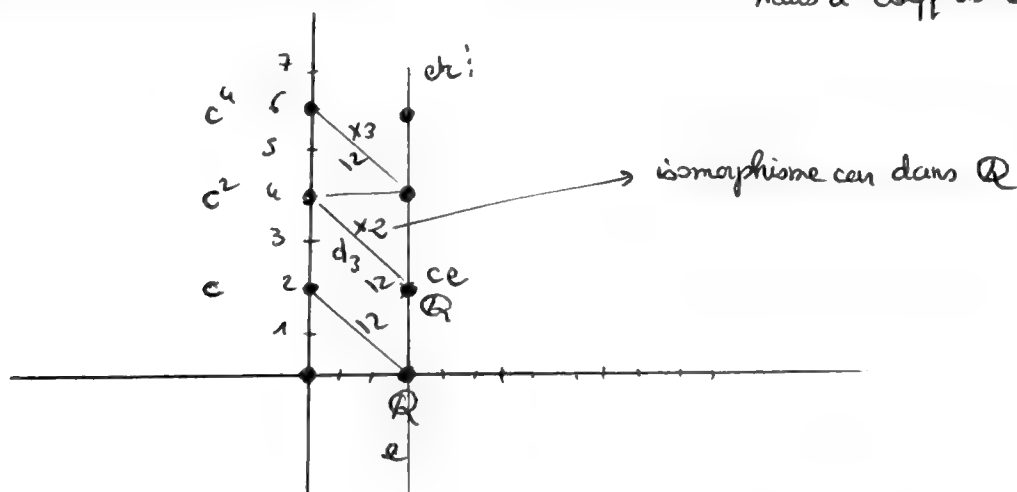
$H_*(X; \mathbb{Q}) = H_*(X) \otimes \mathbb{Q}$  d'après le Théorème des coeff. universels.  
(car  $\mathbb{Q}$  est plat)

① On utilise la suite spectrale de cohomologie de la fibration :

$$K(\mathbb{Z}, 2) \rightarrow * \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$$

$$\textcircled{\text{Th}} : E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z}, 3); \underbrace{H^q(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Q})}_{\text{coeff. dans } \mathbb{Q}}) \xrightarrow{cv} \underbrace{\mathbb{Q}_{(0,0)}}_{\text{degré } (0,0)}$$

$H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c]$  (c'est la même suite spect que pour  $\pi_4(S^3)$ , mais à coeff de  $\mathbb{Q}$ )



Année : CCP Rang  $H_*(K(\mathbb{Z}, 3)) = \begin{cases} 0 \text{ si } * \neq 3, 0 \\ 1 \text{ si } * = 3 \text{ ou } 0 \end{cases}$

③ Torsion de  $H_*(\mathbb{R}(Z, 3))$ ?

~~$\mathbb{Z}_{(p)}$~~   $\mathbb{Z}_{(p)}$  = sous-anneau de  $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} / \Delta(a, b) = 1 \text{ et } \Delta(b, p) = 1 \}$  est plat

$$\bigcup_p \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \mathbb{Q} \quad \bigcup_{q \neq p} \mathbb{Z}[\frac{1}{q}] = \mathbb{Z}_{(p)}.$$

$\mathbb{Z}_{(p)}$  est un anneau local (1 seul idéal maximal  $p\mathbb{Z}_{(p)} \subset \mathbb{Z}_{(p)}$ )

$$\mathbb{Z}_{(p)} \text{ plat} \Rightarrow \boxed{H_*(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong H_*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}} \quad (\text{cf. Th. CU})$$

De m, le th CU de cohomologie donne:

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}_{(p)}) \rightarrow H^n(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \rightarrow \text{Hom}(H_n; \mathbb{Z}_{(p)}) \rightarrow 0$$

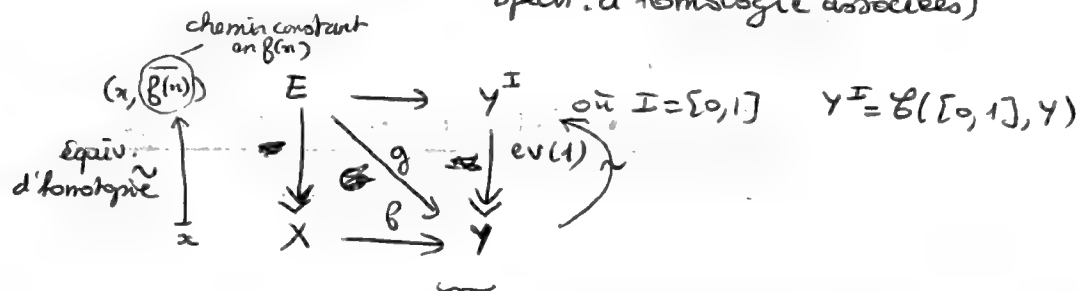
$$\text{ou } \begin{cases} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbb{Z}_{(p)} \\ \text{Hom}(F, \mathbb{Z}_{(p)}) = 0 \\ \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}) = 0 \\ \text{Ext}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}) = 0 \text{ si } q \text{ premier } \neq p \\ \text{Ext}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi  ~~$H^*(X; \mathbb{Z}_{(p)})$~~   $\boxed{H^*(X; \mathbb{Z}_{(p)}) = H^*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}}$  (cf autre th. des CU que celui donné en cours)

④

# Fibre d'une application :

- (1) 
$$\begin{array}{ccc} F & & \\ \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$
  $\beta: X \rightarrow Y$  donné.  
 Pb: Construire  $F$  de sorte que (1) se comporte comme une fibration (suite ex. longue d'homotopie + suites spectrales d'homologie associées)

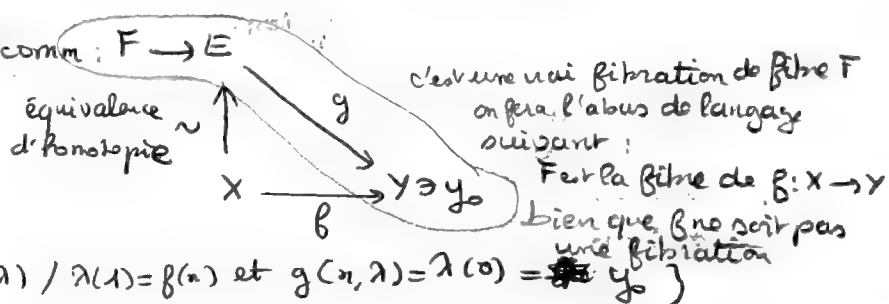


c'est une fibration d'Hurewicz. (possède la pro. de relèvement d'homotopie)

$E = X \times_{\beta} Y^I = \{(n, \lambda) \in X \times Y^I \mid \beta(n) = \lambda(1)\}$  désigne la fibration pull-back.  
 $E \rightarrow X$  est une fibration, et c'est une équivalence d'homotopie.

$$g: E \rightarrow Y \quad (n, \lambda) \mapsto \lambda(0)$$

d'où le diag. comm. :



$$g^{-1}(y_0) = F = \{(n, \lambda) \mid \lambda(1) = \beta(n) \text{ et } g(n, \lambda) = \lambda(0) = y_0\}$$

Notons  $EY_{y_0} = \{\lambda \in Y^I \mid \lambda(0) = y_0\}$

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & EY \\ \downarrow & & \downarrow ev(1) \\ X & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Exemple :  $S^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$

$$\pi_2(S^2) \longrightarrow \pi_2(\mathbb{P}^\infty \mathbb{C})$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \cdot 21 & & \downarrow \cdot 12 \\ H_2(S^2) & \xrightarrow{\cong} & H_2(\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}) \end{array}$$

cf Hurewicz  
 (car  $H_1(S^2) = 0$ )

cf Hurewicz  
 (car  $H_1(\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}) = 0$ )



NB:  $S\pi_i(X) = 0$  si  $i < n$  (et  $n \geq 2$ )

on a  $\pi_n(X) = H_n(X)$  d'après Hurewicz, Notons  $\pi_i(X) = \pi_i$ .

Alors  $X \longrightarrow K(\pi_n, n) \overset{\alpha}{\hookrightarrow} [X, K(\pi_n, n)] = H^n(X, \pi_n^*) = \text{Hom}(\pi_n, \pi_n) \ni \text{id}$   
 (cf L45) (cf coeff. univ L44)

donc on peut parler de  $X \xrightarrow{\text{id}} K(\pi_n, n)$

Construction de Cartan - Serre (1952) (Méthode du meurtre des groupes d'homotopie) (Killing homotopy groups)

On a la fibration:  
 (cf. abus de langage!)

$$X_{<n>} \longrightarrow X \xrightarrow{\text{"id"}} K(\pi_n, n)$$

$\doteq$  "X rendue n-connexe"

(X est, à priori, (n-1)-connexe)

d'où la suite exacte longue d'homotopie

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_{i+1}(K) & \longrightarrow & \pi_i(X_{<n>}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_i(X) \xrightarrow{\cong} \pi_i(K(\pi_n, n)) \longrightarrow \cdots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

si  $i > n$   
 si  $i = n$

Ainsi  $\pi_i(X_{<n>}) \cong \pi_i(X)$  si  $i > n$

$\pi_n(X_{<n>}) = 0$  si  $i = n$

$\pi_i(X_{<n>}) = 0$  si  $i < n$

Comment calculer  $\pi_{n+1}(X)$ ? Hurewicz donne seulement  $\pi_n(X) = H_n(X)$  car  $\pi_i(X) = 0$  si  $i < n$ .

On aura ici:

$$\pi_{n+1}(X) \xleftarrow{\cong} \pi_{n+1}(X_{<n>}) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_{n+1}(X_{<n>})$$

D'où  $\pi_{n+1}(X) \cong H_{n+1}(X_{<n>})$

NB: Si  $n=1$ ,  $X_{<1>} = \tilde{X}$  revêtement universel de  $X$ , la construction  $X_{<n>}$  généralise celle des revêtements. Mais attention,  $X_{<n>}$  n'est plus un revêtement de  $X$ .



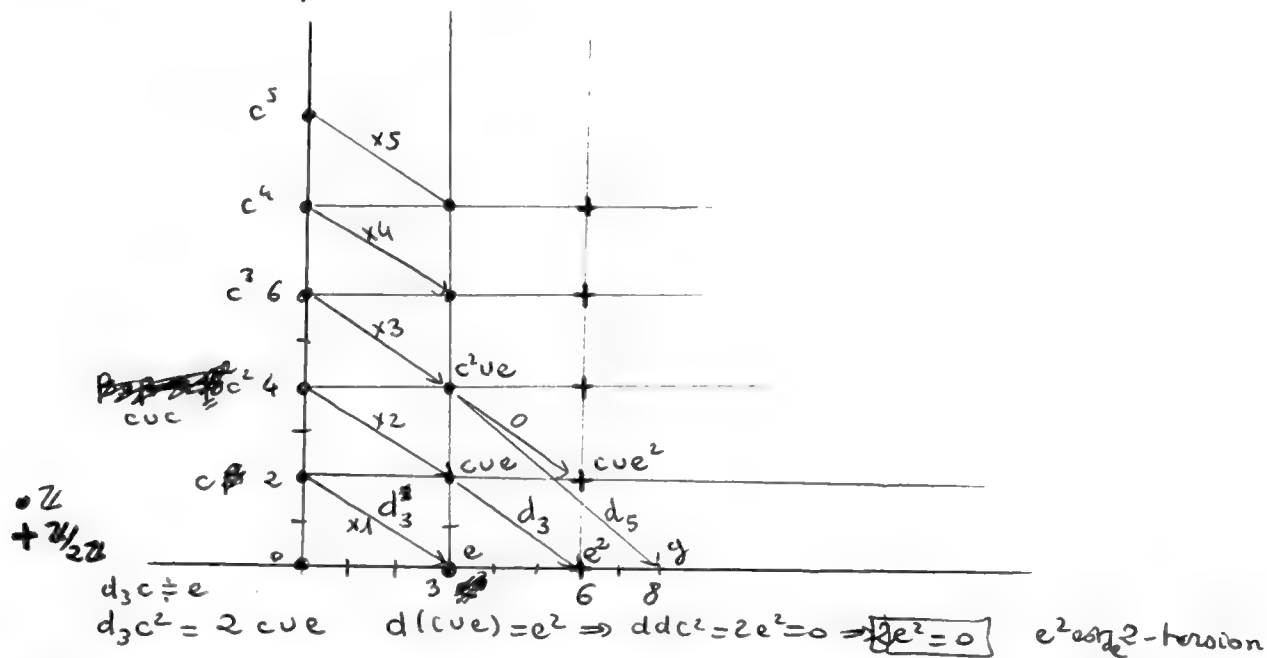
Fibration:  $S^3(3) \rightarrow S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$

1) Calcul de  $H^*(K(\mathbb{Z}, 3))$

Analysons la fibration

$$\begin{array}{ccccc} & & E \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3) & & \\ & & \parallel & & \\ \Omega K(\mathbb{Z}, 3) & \rightarrow & * & \rightarrow & K(\mathbb{Z}, 3) \\ \parallel & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & \underbrace{\hspace{2cm}} \\ K(\mathbb{Z}, 2) & & \text{espace} & & \text{inconnu} \\ \text{fibre connue} & & \text{total connu} & & \end{array}$$

On utilise les suites spectrales :



Fibration dont l'espace total est contractible, donc tout doit disparaître

Ainsi  $H^*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 3 \\ 0 & \text{si } * < 3 \text{ ou } * = 4, 5 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } * = 6 \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \text{si } * = 8 \end{cases}$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  + (torsion  $< p$ ) pour  $* = 2p + 2$ .

exercices:

a) Connaissant  $H^6(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , calculez  $H^5(S^3(3); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et en déduire  $H_4(S^3(3); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_4(S^3)$

b)  $H^i(S^3; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  : la  $p$ -torsion de  $\pi_i(S^3)$  est nulle pour  $i < 2p$  et non nulle pour  $i = 2p$  (en fait  $\pi_{2p}(S^3) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus (\text{torsion } < p)$ )

Rappel :

$$K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{P}^\infty \mathbb{C} \quad H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c]$$

Si  $G$  groupe abélien de type fini,  $G$  s'écrit :

$$G = \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{\text{partie libre}} \oplus \bigoplus_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ n \in \mathbb{I}_p}} \underbrace{\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}_{\text{torsion}}$$

 $r = \text{rang du groupe a.t.f.}$   
 (p dénotent 1 sous-ensemble fini de  $\mathbb{P}$ )

$$K(G \oplus H, n) = K(G, n) \times K(H, n)$$

$$(\text{car } \pi_n(G \oplus H) = \pi_n(G) \times \pi_n(H))$$

Pour connaître  $K(G, n)$ , il suffit de connaître  $K(\mathbb{Z}, n)$  et  $K(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}, n)$ .

$$\text{Si } p=2, \quad K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{P}^\infty \mathbb{R} \doteq \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{P}^n \mathbb{R}$$

En effet :

$$\begin{array}{ccc} S^0 \hookrightarrow S^1 & \text{revêtement à 2 feuillets} & = \text{fibration de fibre } S^0 \\ \downarrow & & \\ \mathbb{P}^n \mathbb{R} & & \end{array}$$

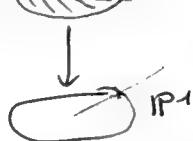
$$\text{donc } \pi_i(\mathbb{P}^n) = \pi_i(S^1) \text{ si } i \geq 2$$

$$\pi_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ (si } n \geq 1)$$

Remarque : Si  $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ , alors  $H^*(X; \mathbb{Z})$  n'a pas de  $p$ -torsion  
 d'après le théorème des coefficients universels en cohomologie (idem en hom.)

$$H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[w] & \text{si } p=2 \\ 0 & \text{si } p \neq 2 \text{ et } 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p=0 \text{ (car } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & S^\infty \sim * \\ \downarrow & & \\ \mathbb{P}^\infty \mathbb{R} & & \end{array}$$

eventuellement  $\|u\| \leq 1$ 

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$\downarrow \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

• Fibré trivial

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}^n \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \supset \{(d, n) / n \in d\} = E \quad (d = \text{data} \in \mathbb{P}^n \mathbb{R}) \\ \downarrow p_1 \\ \mathbb{P}^n \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi \\ \pi^{-1}(d) = d \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

 $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  est le fibré tautologique de fibre  $\mathbb{R}$ Si  $n=1$ ,  $E = \text{ruban de Moebius "infini"}$ 

après 1 tour :

$$E \supset \dot{E} = \{(d, n) / n \in d, \|n\| = 1\} \simeq S^n$$

equiv. homotopie  $\sim$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{P}^n$$

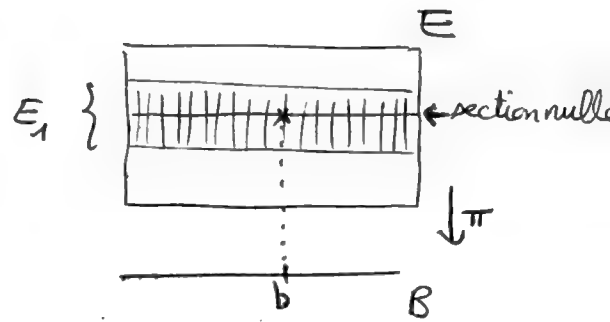
$\mathbb{R}^{n+1}$   $S^n$  } fibres.

• Fibré vectoriel réel euclidien  $E \rightarrow B$

$$E \supset \dot{E} = \{x \in E / \|x\| = 1\} = \text{fibré en sphère.}$$

$$\downarrow \pi$$

$$B$$



$$E_1 = \{x \in E / \|x\| < 1\}$$

fibré en boule

Isomorphisme de Thom :

$$(\mathbb{R}^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E, \dot{E}), \text{ c'est un fibré relatif = } \text{fibré pair fibré}.$$

$$\downarrow$$

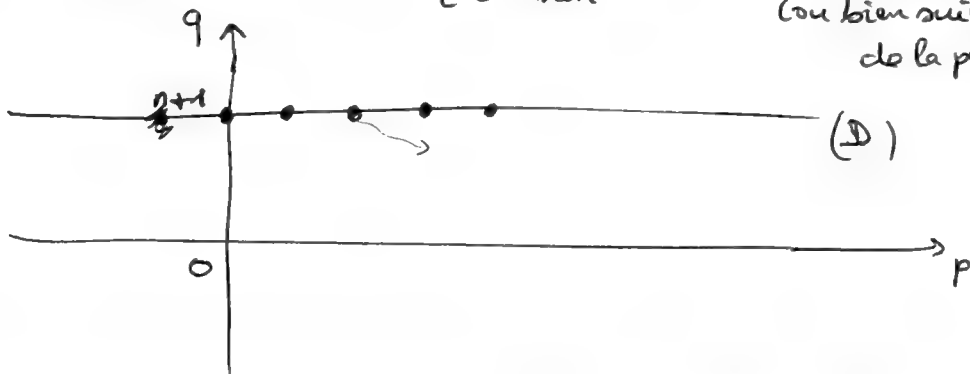
$$B$$

l'isomorphisme de Thom est  
(I) isomorphisme d'algèbre (Suite Spectr.)

« Si le fibré est orientable,  $H^p(B; H^q(\mathbb{R}^{n+1}, S^n; G)) \Rightarrow H^{p+q}(E, \dot{E}; G)$ , et

$$H^q(\mathbb{R}^{n+1}, S^n; G) = \begin{cases} G & \text{si } q = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

par excision  
(ou bien suite de coh. longue  
de la paire)



La suite spectrale est concentrée en  $(D)$ , donc elle est triviale ( $d=0$ ), donc :

$$H^p(B; G) \simeq H^{p+n+1}(E, \dot{E}; G). \quad (\text{Thom})$$

$H^p(B; G) =$  cohomologie d'un fibré en boule modulo le fibré en sphère

d'après le  
th. co. de suite  
spectrale.

NB :  $E/\dot{E} = T(F)$  où  $F: E \rightarrow B$  et par excision  $H^{p+n+1}(E, \dot{E}; G) \simeq H^{p+n+1}(T(F); G)$

Prendre  $G = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  à 1 générateur 1. Pour  $p=0$ , soit  $\Phi$  désigne l'isomorphisme de Thom,

$$1 \in H^0(B; H^{n+1}(\mathbb{R}^n, S^n)) \xrightarrow{\Phi} H^{n+1}(E, \mathbb{Z})$$

$\parallel$   
 $G \pi_0(B)$

$$\downarrow$$

$$H^0(\{b\}; H^{n+1}(\mathbb{R}^n, S^n)) \xrightarrow{\Phi} H^{n+1}(\mathbb{R}^n, S^n) = G$$

Pour tout  $b \in B$ ,  $i_b$  est l'inclusion can.  $i_b: (F_b, \mathbb{Z}) \hookrightarrow (E, \mathbb{Z})$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\cong} & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{b\} & \hookrightarrow & B \end{array}$$

Orienter le fibré, c'est se donner une classe  $u \in H^{n+1}(E, \mathbb{Z})$  telle que  $\forall b \in B$   $i_b^* u$  engendre  $G$

Proposition: ~~...~~  $G$

$$\Phi^0: H^0(B; G) = H^0(B; H^{n+1}(\mathbb{R}^n, S^n)) \xrightarrow{\sim} H^{n+1}(E, \mathbb{Z})$$

$1 \xrightarrow{\text{def}} u$

$$\Phi^p: H^p(B; H^{n+1}(\mathbb{R}^n, S^n)) \xrightarrow[\Phi^p]{\sim} H^{p+n+1}(E, \mathbb{Z})$$

$\simeq \downarrow p^*$

$$\begin{array}{ccc} H^p(E) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+n+1}(E, \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(E) \otimes H^{n+1}(E, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

$\Phi^p(\pi) = p^*(\pi) \cup u$

ENDONCE!

"l'isomorphisme de Thom est le cup-produit par la classe fondamentale."

ie  $\Phi^p(\pi) = p^*(\pi) \cup u$   
(on montre que  $\Phi$  est  $H^*(B)$ -linéaire)

preuve:

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{p} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

$$(F, \mathbb{Z}) \longrightarrow (E, \mathbb{Z})$$

$\downarrow$   
 $B$

donc  $H^*(E)$ -module (grâce à  $p^*$ )

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F, \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(E, \mathbb{Z})$$

$H^*(B)$ -module  $\quad H^*(E)$ -module

$\searrow$  à partir des cup-produits

$p^*: H^*(B) \longrightarrow H^*(E)$

# Retour aux moutons

$$(R, S^0) \hookrightarrow (E, S^0)$$

$$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (\text{faux si } G = \mathbb{Z})$$

↓ fibre tautologique

L'isom. de Thom donne ici :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} : H^p(\mathbb{P}^\infty) &\xrightarrow{\cong} H^{p+1}(E, S^0) = H^{p+1}(\mathbb{P}^\infty R) \sim \text{equiv. homotop.} \\ \pi &\longmapsto p^*(n) \cup u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow R_+ \\ &H^{p+1}(E) \\ &\uparrow p^* \\ &\pi \cup w \in H^{p+1}(\mathbb{P}^\infty) \end{aligned}$$

$$u \in H^1(E, S^0)$$

$$\downarrow \cong$$

$$H^1(E)$$

$$\uparrow \cong p^*$$

$$w = H^1(\mathbb{P}^\infty) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

le générateur de

$\mathbb{E}$  est donnée par :

$$\mathbb{E}(n) = p^*(n) \cup u = \pi \cup w$$

On veut de montrer que :

Prop : A coefficients  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{P}^\infty) &\longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{P}^\infty) \text{ est un isomorphisme} \\ \pi &\longmapsto \pi \cup w \end{aligned}$$

$w$  engendre  $H^1(\mathbb{P}^\infty)$  donc, par récurrence  $w^k$  engendre  $H^k(\mathbb{P}^\infty)$

Finalement :

$$\text{Prop : } H^*(\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[w]$$

Remarque : Cette dem. est vraie avec  $\mathbb{P}^n$ , ie

$$H^*(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[w] / \{w^{n+1} = 0\}$$

Continuer :  $K(\mathbb{Z}_2, 2)$  ? On utilise la suite spectrale en coh. de la fibration  $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow * \longrightarrow K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$

## ANNEXE A

au cours de Lemaire sur  
les "groupes d'homotopie"Spectral sequences§0. Motivations. Homology of differential objects

Spectral sequences stand among the most powerful mathematical concepts invented during the last decades, but in spite (or because!) of that they usually look hard to the beginner. Part of the difficulty with them lies in the use of tricky indices (usually three!): in these introductory notes, we shall try to postpone the coming in of indices as late as possible.

Spectral sequences deal with the (co)homology of complicated situations. Recall that a (chain) complex is a sequence of abelian groups (or more generally, objects which behave like abelian groups, such as sheaves) and maps

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

which satisfies  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ . Homology in degree  $n$  is  $H_n = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$ . Since we want to put indices aside for the moment,

we consider such a complex as a graded object  $C_\bullet = (C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  together with a map  $d$  of degree  $(-1)$  which satisfies  $d^2 = d \circ d = 0$ . Graded abelian groups and maps behave like ordinary groups — one may define the abelian category of graded ab. groups and maps, therefore we may forget the grading and define a

differential object  $(M, d)$  as an object together with an endomorphism  $d$  which satisfies  $d^2 = 0$ . Again "object" means an object in some abelian category, i.e. a category in which the usual notions for abelian groups, such as kernels, images, quotient exact sequences, — can be defined.

Def 0.1 The homology of the differential object  $(M, d)$  is  $HM = \text{Ker } d / \text{Im } d = (\text{cycles}) / (\text{boundaries})$ .

Def 0.2 A morphism of diff. obj.  $(M, d) \xrightarrow{f} (M', d')$  is a map  $f: M \rightarrow M'$  such that  $d'f = f \circ d$ . One readily checks that differential objects and maps make up a category. (ii) that a differential map  $f: (M, d) \rightarrow (M', d')$  induces  $Hf: HM \rightarrow HM'$ . (iii) that homology  $H$  is a functor from (differential objects) into (objects).

Def 0.3 A subobject  $M' \subset M$  is a differential subobject of  $(M, d)$  if  $d(M') \subset M'$ . Then  $(M', d|_{M'})$  is a differential object and the inclusion is a diff. morphism.

Note that  $d$  induces then a differential  $\bar{d}$  on the quotient  $M/M'$ , and we shall say that we have an exact sequence of differential objects

$$0 \rightarrow (M', d|_{M'}) \rightarrow (M, d) \rightarrow (M/M', \bar{d}) \rightarrow 0$$

We leave to the connoisseur's delight that differential objects make up an abelian category ...



the fundamental fact about homology is  
 0.4. the homology exact triangle

let  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/M' \rightarrow 0$  be an exact sequence of differential objects (we omit differentials for the sake of brevity). Then the following triangle is exact:

$$\begin{array}{ccc} H(M') & \xrightarrow{H(i)} & H(M) \\ \delta \swarrow & & \searrow H(p) \\ & H(M/M') & \end{array}$$

where  $\delta$  is defined as follows: let  $m + M' \in \text{ker } d$ , this means  $dm \in M'$ . Then  $dm$  is a cycle in  $M'$  whose class in  $H(M')$  is  $\delta m$ .

The proof is an exercise. The canonical situation is that of complexes: then  $H^i$  and  $H^p$  have degree 0, while  $\delta$  which is induced by  $d$  has degree -1. The exact triangle uncoils as the long exact sequence of homology groups associated with a short exact sequence of complexes.

### 0.5 Filtered differential objects

A filtration is a sequence of subobjects of a given object, which is increasing or decreasing. An increasing filtration of  $M$  is usually denoted  $(F_n M)_{n \in \mathbb{Z}}$ , with

$$\dots \subset F_{n-1} M \subset F_n M \subset F_{n+1} M \subset \dots \subset M$$

Decreasing filtrations can be viewed as increasing ones by changing the sign in the indices. Therefore for the moment we shall stick to increasing filtrations.

A differential filtered object is a filtered differential object (!), i.e.  $d(F_n M) \subset F_n M$  for all  $n$ . Morphisms of filtered objects are defined in the obvious fashion.

In practice, one puts a filtration on a differential object to help understanding its homology. Indeed, if  $(F_n M)_{n \in \mathbb{Z}}$  is a filtration on a differential object  $M$ , we get in particular for each  $n$  an exact triangle

$$H(F_{n-1} M) \rightarrow H(F_n M)$$

(\*)

$$H(F_n M / F_{n-1} M)$$

associated with the exact sequence

$$0 \rightarrow F_{n-1} M \hookrightarrow F_n M \rightarrow F_n M / F_{n-1} M \rightarrow 0$$

Definition 0.5. the associated graded object to  $(F_n M)_{n \in \mathbb{Z}}$  is  $(F_n M / F_{n-1} M)_{n \in \mathbb{Z}} = G_\bullet M$

Note that a morphism of filtered objects induces a morphism of the associated graded objects, and that the associated graded to a differential filtered object inherits a differential (of degree zero). We thus may consider the graded thing  $H(G_\bullet M)$

On the other hand, we may define a filtration on the homology  $HM$  by:

$$F_n HM = \text{Im}(H_i: H(F_n M) \rightarrow HM) \\ = \text{Ker}(H_j: HM \rightarrow H(M/F_n M))$$

Note the exactness of the sequence

$$H(F_n M) \xrightarrow{H_i} HM \xrightarrow{H_j} H(M/F_n M)$$

as part of the triangle for

$$0 \rightarrow F_n M \hookrightarrow M \xrightarrow{j} M/F_n M \rightarrow 0$$

The main objective of spectral sequence theory is to compute  $H(G_n M)$

which is in general easy to compute

with  $G_n(M)$

the associated graded object to the above filtration.

But let us come back to triangle  $(*)$ , which we may think of as a triangle of graded objects, with  $A_n = H(F_n M)$ ,  $E_n = H(G_n M)$  the exact triangle of graded objects

$$A_n \xrightarrow{H_i} A_n \xrightarrow{(-1)^j \delta} E_n \xrightarrow{H_j} E_n$$

is a particular instance of what is called an exact couple, which we shall now discuss - Again we shall forget the grading -

## 51. Exact couples

The concept and terminology is due to W. Massey - In spite of the name, an exact couple is a 5-uple  $\mathcal{C} = (A, E, i, j, k)$  of objects and maps such that the triangle

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ & \nwarrow k & \uparrow j \\ & E & \end{array}$$

is exact; thus  $\text{Ker } i = \text{Im } k$ ,  $\text{Ker } j = \text{Im } i$ ,  $\text{Ker } k = \text{Im } j$

Remark 1.1:  $j \circ k$  is a differential on  $E$

$$\text{indeed } (j \circ k) \circ (j \circ k) = j \circ (k \circ j) \circ k = 0$$

The main trick is the construction of the derived couple:

Definition and Theorem 1.2. Let  $\mathcal{C} = (A, E, i, j, k)$  be an exact couple. Set  $A' = i(A)$ ,  $E' = H(E, j \circ k)$

Define:

$$i': A' \rightarrow A' \text{ to be } i' = i \circ i$$

$$j': A' \rightarrow E' \text{ by } j'(a') = j(a) \text{ where } ia = a'$$

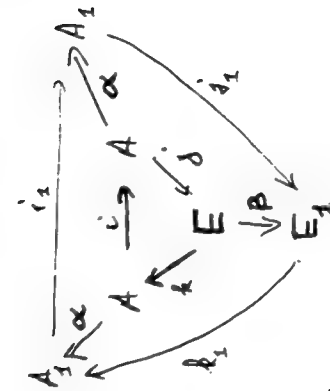
$$k': E' \rightarrow A' \text{ to be induced by } k$$

Then these maps are well defined and

$$\mathcal{C}' = (A', E', i', j', k')$$

is an exact couple, which is called the derived couple of  $\mathcal{C}$ .

Before proving 1.2, we observe that one may define a map of exact couples  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  to be a couple of maps  $\alpha: A \rightarrow A'$ ,  $\beta: E \rightarrow E'$  such that the diagram:



is commutative. There is a category of exact couples and derivation as defined above is a functor from this category into itself.

Proof of 1.2. We only give samples:

•  $j': A' \rightarrow E'$  is well defined:

1/  $ja \in \text{Ker } jk$ , for  $j.k.j' = 0$

2/  $ia_1 = ia_2 = a' \Rightarrow a_1 - a_2 \in \text{Ker } i = \text{Im } k$

then  $a_1 = a_2 + ke$

$ja_1 = ja_2 + jke$

and  $\overline{ja_1} = \overline{ja_2} \in H(E, jk)$

•  $\text{Ker } j' = \text{Im } i'$

1/  $j'.i'(a') = ja' = j.i(a) = 0, \forall a' = ia \in A'$

2/ let  $a' \in A'$  such that  $j'a' = 0$

Then  $j'a' = \overline{ja} = ja + jk(E)$

$\overline{ja} = 0 \Leftrightarrow ja \in jk(E)$

but  $ja = jke \Rightarrow a - ke \in \text{Ker } j = \text{Im } i$

Thus  $\exists a_1 \in A, a - ke = ia_1$

and  $a' = ia = i(a - ke) = i ia_1 = i'(ia_1)$

\*(of suite des vérifications dernière)

CFD

The construction of the derived couple can be iterated indefinitely, yielding a sequence of exact couples  $\mathcal{C}^{(n)} = (A^{(n)}, E^{(n)}, i^{(n)}, j^{(n)}, k^{(n)})$  with  $\mathcal{C}^{(n)'} = \mathcal{C}^{(n+1)}, \mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}$ .

Set  $d^{(n)} = j^{(n)} \circ k^{(n)}$ . We obtain a sequence of differential objects

$$(E^{(n)}, d^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$$

such that  $H(E^{(n)}, d^{(n)}) = E^{(n+1)}$

Definition 1.3. A special sequence is a sequence of differential object such that each term is the homology of the preceding one.

Thus every exact couple yields by the derivation process a special sequence -

observe that if  $(E^{(n)}, d^{(n)})$  is a special sequence  $E^{(n+1)}$  is a motivic of a subobject of  $E^{(n)}$ , the iterated "subquotients" are homot things, but there is a standard way to lift everything back into the starting diff. object  $E^{(1)}$ .

Define  $Z^{(n)} = \text{Ker } d^{(n)}, B^{(n)} = \text{Im } d^{(n)}$ , so that  $E^{(n+1)} = Z^{(n)} / B^{(n)}$

Consider the diagram on next page, where  $\pi_i$ 's are canonical injections (quotient maps):

\* Suite des vérifications :

Par définition :

$$\begin{array}{ccc}
 A' = i(A) & \xrightarrow{i' = i|_{A'}} & A' \\
 \nwarrow k' & \searrow j' & \\
 & E' = H(E, j \circ k) = \text{Ker } j \circ k / \Delta_m j \circ k &
 \end{array}
 \quad
 \left\{
 \begin{array}{l}
 i' = i|_{A'} \\
 j'(i(a)) = \overline{j(a)} \\
 k'(\bar{e}) = k(e)
 \end{array}
 \right.$$

• k' est bien définie :

- 1) Si  $\bar{e} = \overline{j \circ k(e)}$   $e = j \circ k(e) \Rightarrow k(e) - k(\beta) = k \circ j \circ k(e) = 0$
- 2)  $\Delta_m k' \subset A'$  car si  $a = k'(\bar{e}) = k(e) \Rightarrow j(a) = j \circ k(e) = 0$  car  $e \in \text{Ker } j \circ k \Rightarrow a \in \text{Ker } j = \Delta_m i = A'$

•  $\Delta_m k' = \text{Ker } i'$  :

- 1)  $i' \circ k'(\bar{e}) = i'(k(e)) = i \circ k(e) = 0$
- 2) Si  $a' \in A' / i'(a') = 0$ , notons  $a' = i(a)$ . Or  $a : i \circ i(a) = 0$  donc  $i(a) \in \text{Ker } i = \Delta_m k \Rightarrow \exists e \in E \ a' = i(a) = k(e)$  et  $e \in \text{Ker } j \circ k$  puisque :  $j \circ k(e) = j \circ i(a) = 0$ , donc  $\text{Ker } i' \subset \Delta_m k'$ .

•  $\text{Ker } k' = \Delta_m j$  :

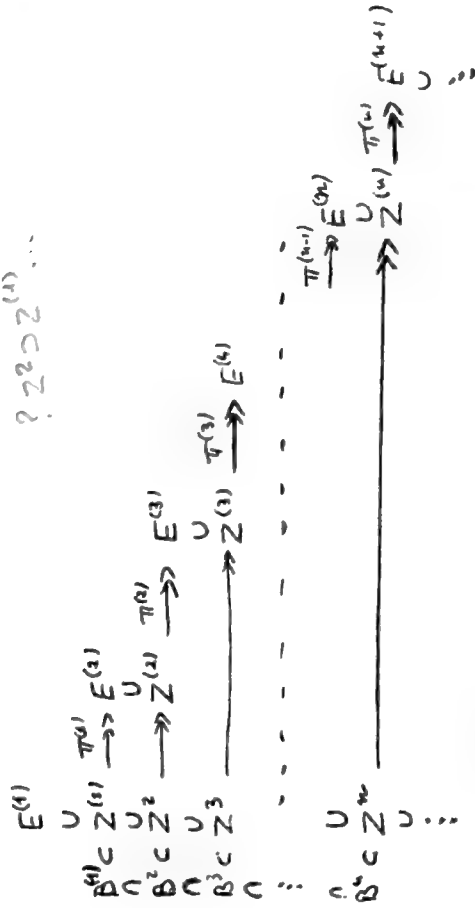
- 1)  $k' \circ j'(a') = k' \circ j'(i(a)) = k'(\overline{j(a)}) = k \circ j(a) = 0$
- 2) Si  $k'(\bar{e}) = 0$ ,  $k(e) = 0 \Rightarrow e \in \text{Ker } k = \Delta_m j$

$$\exists a \in A \quad e = j(a)$$

$$\text{donc } \bar{e} = \overline{j(a)} = j'(i(a)) \Rightarrow \bar{e} \in \Delta_m j'$$

CQFD

?  $Z^2 \supset Z^{(1)}$



We set:  $Z^2 = (\pi^{(1)})^{-1}(Z^{(1)})$

$$Z^3 = (\pi^{(2)})^{-1}(\pi^{(1)})^{-1}(Z^{(1)})$$

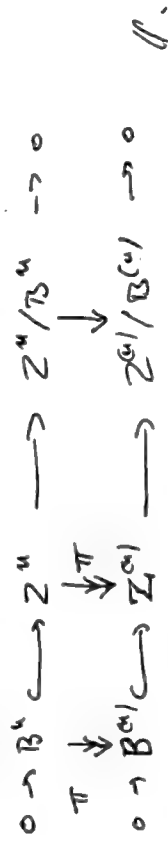
$$Z^n = (\pi^{(n-1)})^{-1} \cdots (\pi^{(2)})^{-1}(\pi^{(1)})^{-1}(Z^{(1)})$$

Similarly, we set:

$$B^n = (\pi^{(n)})^{-1} \cdots (\pi^{(2)})^{-1}(\pi^{(1)})^{-1}(B^{(1)})$$

Lemma 1.4. The canonical surjection  $\pi: Z^n \rightarrow Z^{(n)}$  induces an isomorphism  $Z^n/B^n = Z^{(n)}/B^{(n)} = E^{(n)}$

Proof: contemplate the diagram:



This allows a neat description of the term  $E^{(n)}$  in the spectral sequence derived from an exact couple  $\mathcal{C} = (A, E, i, j, k)$ :

(1.5) Proposition: Let  $\mathcal{C} = (A, E, i, j, k)$  be an exact couple and  $\mathcal{C}^{(n)} = (A^{(n)}, E^{(n)}, i^{(n)}, j^{(n)}, k^{(n)})$  be its  $(n-1)$ -st derived couple ( $\mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}$ ). With the notation defined above, one has:

$$Z^n = k^{-1}(Im i^n) \quad ; \quad i^n = i \circ i \circ \cdots \circ i \quad (n \text{ times})$$

$$B^n = j(Ker i^n)$$

and therefore

$$E^{(n+1)} = k^{-1}(Im i^n) / j(Ker i^n)$$

Proof:  $n=1$ .  $Z^1 = Z^{(1)} = Ker j$

$$Ker j = k^{-1}(Ker j) = k^{-1}(Im i)$$

$$B^1 = B^{(1)} = Im j = j(Im k) = j(Ker i)$$

For any  $n$ ,  $Z^n$  is the set of representatives of  $Z^{(n)}$  in  $E = E^{(1)}$ , and  $d^{(n)}$  is  $j \circ i^{(n-1)} \circ k$

But  $j \circ i^{(n-1)} \circ k(e) = 0 \Rightarrow (\exists a \in A, ke = i^{(n-1)}a \text{ and } j \circ i = 0)$

but  $ja = 0 \Leftrightarrow a = ia'$ , therefore

$$e \in Z^n \Leftrightarrow ke = i^n a' \Leftrightarrow e \in k^{-1}(i^n A)$$

Proceed similarly for  $B^n$ . //

With this description of the term  $E^{(n)}$ , we are in position to define some kind of "limit" for the sequence  $E^{(n)}$ . Observe that, for all  $n \geq 1$

$$B_\infty^n \subset B^{n+1} \subset Z^{n+1} \subset Z^n \subset E^{\frac{1}{2}} = E$$

thus we may define:

$$B^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^n$$

$$Z^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z^n$$

and  $E^\infty = Z^\infty / B^\infty$ . We leave to the reader to prove:

Proposition (1.6) Set  $Im i^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Im i^n$   
 $Ker j^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Ker j^n$   
 then  $E^\infty = K^{-1}(Im i^\infty) / j(Ker j^\infty) //$

We now give another description of  $E^\infty$  which turns out to be useful in some cases (e.g. Boockstein spectral sequences)

Consider the exact sequence

$$A^{(u+1)} \xrightarrow{j^{(u)}} E^{(u+1)} \xrightarrow{k^{(u)}} A^{(u)}$$

extracted from  $E^{(u+1)}$ . By standard algebra, we may write the short exact sequence

$$(**) \quad 0 \rightarrow A^{(u+1)} / Ker j^{(u+1)} \xrightarrow{j^{(u+1)}} E^{(u+1)} \xrightarrow{k^{(u+1)}} Im k^{(u+1)} \rightarrow 0$$

Proposition (1.7) One has the natural isomorphism:

$$Im k^{(u+1)} = Im i^n \cap Ker i \subset A$$

$$A^{(u+1)} / Ker j^{(u+1)} \xleftarrow{\cong} A / Im i + Ker i$$

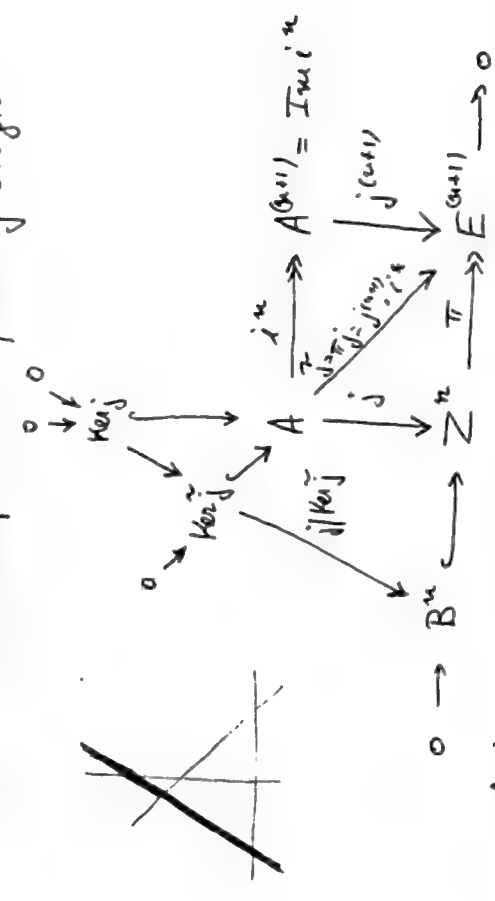
where the second isomorphism is induced by  $i^n$

However, the short exact sequence

$$(***) \quad 0 \rightarrow A / Im i + Ker i \xrightarrow{j} E^{(u+1)} \xrightarrow{k} Im i \cap Ker i \rightarrow 0$$

deduced from  $(*)$  and the above isomorphism still holds for  $u = \infty$ .

Proof: We contemplate the following diagram



which is commutative, and in which the four sequences pictured on the left are exact. Now  $B^n = j(Ker i^n)$ , and it clearly follows from the exactness of the sequence pictured in bold that

$$Ker \tilde{j} = Ker j + Ker i^n = Im i + Ker i^n$$

We leave the remaining verifications as an exercise for the reader. //

## §2. The Bockstein spectral sequence

We apply the above results to obtain a spectral sequence which relates cohomology with coefficients in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  with integral cohomology.

Let  $M$  be a differential free abelian group. We assume that  $HM$  is finitely generated, or if  $M$  is graded, we only assume that each component  $H_n M$  is finitely generated. Let  $p$  be a prime number. Multiplication by  $p$  imbeds in a short exact sequence of differential groups

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\cdot p} M \rightarrow M/pM \rightarrow 0$$

$$H(M \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

which gives rise to an exact couple

$$(2.0) \quad \begin{array}{ccc} HM & \xrightarrow{i} & HM \\ & \nwarrow k & \searrow j \\ & H(M \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \end{array}$$

where  $i$  is multiplication by  $p$

$j$  is induced by reduction mod.  $p$

and  $k$  is the boundary homomorphism,

defined as follows. Let

$\sum z \in M/pM$  be a cycle, and  $\sum z \in \Sigma$ ,  $\sum z \in M$

be a representative in  $M$ . One has  $dz \in pM$ ,

and  $kz$  is the class of the cycle  $\frac{1}{p} dz$

If  $M$  is graded, with a differential of degree

$\pm 1$  (resp  $-1$ ),  $i$  and  $j$  have degree 0 and

$k$  has degree  $(\pm 1)/(p-1)$ .

Definition 2.1 The Bockstein spectral sequence is the spectral sequence associated to the exact couple (2.0).

The first differential  $\beta^{(1)}: H(M \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H(M \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  is called the Bockstein; if  $M$  is the cochain complex of a space, the Bockstein is the simplest coboundary operation: for  $p=2$ , it can be identified with the first Steenrod square  $Sq^1$ .

We now use the description (\*\*\*) of the term  $E^{(n+1)}(p; \mathbb{Z})$ . We first recall our assumption that  $HM$  is finitely generated: by the standard structure theorem, we may write

$$HM = \mathbb{Z}^2 \oplus T_{(\neq p)} \oplus T_{(p)}$$

where  $\mathbb{Z}^2$  is the torsion-free summand,  $T_{(\neq p)}$

is the sum of primary components of order prime to  $p$ ,

and  $T_{(p)}$  denotes the  $p$ -primary torsion summand:

$T_{(p)}$  is a direct sum of cyclic groups whose

orders are powers of  $p$ . Write  $T_{(p)} = \bigoplus \mathbb{Z}/p^{i_j} \mathbb{Z}$

Recall that it is multiplication by  $p$ . By

(\*\*)  $p \cdot \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , we have the exact sequence

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow HM/(pHM + \ker(x_p^n)) \xrightarrow{j} E^{(n+1)} \xrightarrow{k} p^n HM \cap \ker(x_p) \rightarrow 0$$

Observe that multiplication by  $p$  is isomorphic

on  $T_{(\neq p)}$ , and that

$$\ker(x_p^n) = \left\{ \bigoplus_{i_1 \leq n} \mathbb{Z}/p^{i_1} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i_1 > n} p^{i_1 - n} \mathbb{Z}/p^{i_1} \mathbb{Z} \right\} \subset T_{(p)}$$

From this we clearly see that

$$HM/(pHM + \ker(xp^n))$$

is isomorphic to a direct sum of  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 's, namely

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \oplus \left( \bigoplus_{s \geq n} \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} / p\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \right)$$

and so is

$$p^n HM \cap \ker(xp) = \bigoplus_{s \geq n} p^{s-1} \mathbb{Z} / p^s \mathbb{Z}$$

Moreover, there is the same number of  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 's in  $p^n HM \cap \ker(xp)$  as in the right-hand-side summand of  $HM/(pHM + \ker(xp^n))$ , and the extension (2.2) is trivial, because

a subspace of  $E^u = H(M \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  which is a vector space over  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ : therefore  $E^{u+1}$  is a vector space over  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  and (2.2) is an extension of vector spaces, which is always trivial.

We summarize:

Prop 2.2 In the Bockstein spectral sequence, for each  $n \geq 0$ ,  $E^{u+1}$  is a direct sum of cyclic groups of order  $p$ , one for each infinite cyclic summand in  $HM$ , and two for each cyclic summand of order  $p^s$  with  $s > n$ .

Moreover,  $\beta^{u+1}$  maps isomorphically one of the two  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  summands corresponding to each  $\mathbb{Z}/p^{u+1}\mathbb{Z}$ -summand in  $HM$  onto the other.

Moreover, if  $e_p$  denotes the exponents of  $H$  group  $T(p)$ , i.e.  $e_p$  is the smallest integer that  $p^{e_p} T(p) = 0$ , we have

$$\forall n \geq e_p, E^{u+1} = E^{(u+2)} = \dots = E^\infty$$

$$\text{and } E^\infty \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 = (HM/Tor(H)) \otimes$$

As an example, we consider the cohomology of the real projective plane - it is well-known that

$$H^i(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad i=0,1, \\ = 0, \quad i>2$$

$$\text{and } H^i(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad i=0 \\ = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad i=2 \\ = 0, \quad i \neq 0,2$$

Therefore,  $\beta^1: H^1(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z})$  must be an isomorphism. Indeed  $\beta^1 = Sq^1$   $H^*(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ ,  $x \in H^1$ , and  $Sq^1 x = x^2$ .

Exercise 2.3: Describe the Bockstein spectral seq for  $\mathbb{RP}(n)$ ,  $p=2$ .

Exercise 2.4: From the following description of  $H^*(G_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ :

$x$	0	1	2	3	4
basis of $H^*(G_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	1	$w_1$	$w_1^2$	$w_1 w_2$	$w_1^3 w_2$
			$w_2$		



and the Wu formula  $Sq^1 w_i = w_1 w_i$ ,  $i=1,2$ , describe the Bockstein spectral sequence mod. 2 for  $G_2(\mathbb{R}^4)$ .

### 3.3. Spectral sequence of a filtered differential module

Let  $M$  be a differential module, endowed with an increasing filtration  $(F_p M)_{p \in \mathbb{Z}}$ . We assume for simplicity that the filtration is finite: more precisely:

$$0 = F_{-1} M \subset F_0 M \subset F_1 M \subset \dots \subset F_N M = M$$

We thus have a graded exact couple

$$\begin{array}{ccc} H(F_{p-1} M) & \xrightarrow{\quad} & H(F_p M) \\ \downarrow \varphi_p & \searrow & \downarrow \\ H(F_{p-1} M / F_p M) & & \end{array}$$

which we write  $A_* = H(F_* M)$   
 $E_*^1 M = H(F_* M / F_{*-1} M)$

$$(3.0) \quad \begin{array}{ccc} A_* & \xrightarrow{i} & A_* \\ \nwarrow \scriptstyle (-1) & \scriptstyle (0) \searrow & \\ E_*^1 M & & E_*^1 M \end{array}$$

The numbers between brackets indicate the degree of the maps. The spectral sequence associated to this exact couple is denoted  $E_*^2 M$ : it is a spectral sequence of graded modules.

Note that by the Noether isomorphism lemma, there are exact sequences of differential modules  $(F_p = F_p H(\text{p-shot}))$

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow F_p / F_{p-1} \rightarrow F_{p+1} / F_{p-1} \rightarrow F_{p+1} / F_p \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow F_{p-1} / F_{p-2} \rightarrow F_p / F_{p-2} \rightarrow F_p / F_{p-1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

and therefore boundary maps

$$\begin{aligned} \partial'_2: H(F_{p+1} / F_p) &\rightarrow H(F_p / F_{p-1}) = E_p^1 \\ \partial''_2: E_p^1 = H(F_p / F_{p-1}) &\rightarrow H(F_{p-1} / F_{p-2}) \end{aligned}$$

(3.1) Proposition: For each  $r \geq 1$ , one has

$$E_p^{2r} M = \text{Ker } \partial''_2 / \text{Im } \partial'_2$$

Proof: We look at the following diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & H(F_{p-1}) & \xrightarrow{j'} & \\ & \nearrow k & & \searrow j'' & \\ H(F_{p+1} / F_p) & \xrightarrow{\partial'_2} & H(F_p / F_{p-1}) & \xrightarrow{\partial''_2} & H(F_{p-1} / F_{p-2}) \\ \downarrow k' & & \downarrow j & & \\ & & H(F_p) & \xrightarrow{i''} & H(F_{p+1}) \end{array}$$

in which arrows on a same line make an exact sequence, and triangles commute. Clearly  $\text{Im } \partial'_2 = j(\text{Im } k') = j(\text{Ker } i'')$   
 $\text{Ker } \partial''_2 = k'^{-1}(\text{Ker } j'') = k'^{-1}(\text{Im } i')$

and the result follows from (1.5) //

Observe that if  $p+r \geq N$  and  $p-r \leq 0$ , i.e.  $r \geq \max(p, N-p)$ , one has

$$E_p^{2r+1} = E_p^{1+r} = E_p^\infty = \text{Ker } \delta_p / \text{Im } \partial'$$

with  $k: H(F_p/F_{p-1}) \rightarrow H(F_{p-1})$

$\partial': H(M/F_p) \rightarrow H(F_p/F_{p-1})$  are boundary maps.

on the other hand, there is a natural filtration on  $HM$  defined as follows:

$$\begin{aligned} F_p HM &= \text{Im}(H F_p M \rightarrow HM) \\ &= \text{Ker}(HM \rightarrow H(M/F_p M)) \end{aligned}$$

in other words, a class has filtration  $p$  if it contains a cycle of filtration  $p$ . Note that the two descriptions of  $F_p HM$  coincide by exactness of the triangle associated to  $0 \rightarrow F_p \rightarrow M \rightarrow M/F_p \rightarrow 0$ .

We claim that the following crucial fact is true:

Proposition (3.2)

$$\text{Gr}_p HM = F_p HM / F_{p-1} HM = E_p^\infty$$

Proof: we have the commutative diagram with exact lines

$$\begin{array}{ccccc} HM & & \delta_p & & \\ \downarrow \delta_{p-1} & & \nearrow & & \\ H(M/F_p) & \xrightarrow{\partial'} & H(F_p/F_{p-1}) & \xrightarrow{E'} & H(M/F_{p-1}) \rightarrow H(M/F_p) \\ & & \searrow k & & \downarrow \\ & & & & H(F_{p-1}) \end{array}$$

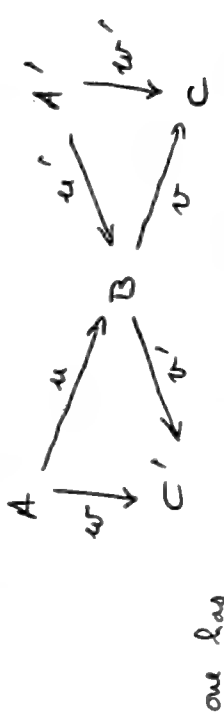
By the second description of  $F_p HM$ , we have  $\text{Gr}_p HM = \text{Ker } \delta_p / \text{Ker } \delta_{p-1}$

and by exactness and the above remark

$$E_p^\infty = \text{Ker } k / \text{Im } \partial' = \text{Ker } k / \text{Ker } E$$

The result now follows from the following "butterfly lemma". //

Lemma 3.3 In the following diagram of modules, with exact lines:



one has

$$\begin{aligned} \text{Ker } w / \text{Ker } u &= \text{Ker } w' / \text{Ker } u' \\ (\text{and } \text{Im } v' / \text{Im } w &= \text{Im } v / \text{Im } w') \end{aligned}$$

Proof: check that  $u'^{-1} \circ u$  induces a well defined map from  $\text{Ker } w / \text{Ker } u$  to  $\text{Ker } w' / \text{Ker } u'$ , whose inverse is induced by  $u^{-1} \circ u'$ . //

Conclusion: It follows from (1.5), (1.6) that the  $E^r$  terms appear as "successive approximations" of  $E^\infty$ . Now the key proposition 3.2. states that  $E^\infty$  is isomorphic to the associated graded to the filtration of  $HM$  induced by the filtration of  $M$ , if this filtration is finite. One then says that the spectral sequence converges to  $HM$ , and write  $E^r \Rightarrow HM$

# §4. Bigradings.

Most spectral sequences arising in nature are spectral sequences of bigraded modules - the most notable exception being the Bockstein spectral sequence. These arise from a filtered differential graded module  $(F_p M_*, p \in \mathbb{Z})$ :

let us first assume that the filtration is increasing and  $d: M_* \rightarrow M_*$  has degree  $-1$ : thus  $M_*$  is a chain complex and  $(F_p M_*)_{p \in \mathbb{Z}}$  is an increasing sequence of subcomplexes of  $M_*$ . The exact couple (3.0) becomes a bigraded couple, but there are two bigrading conventions in literature: we adopt J.P. Serre's convention, which seems to be the most widely used one. Set:

$$A_{p,q}^1 = H_{p+q}(F_p M_*)$$

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(F_p M_*/F_{p+1} M_*)$$

$p$  is the filtering degree  
 $q$  is the complementary degree  
 $p+q$  is the total degree, i.e. the degree in  $M_*$   
 The bigradings of the maps  $i, j, k$  are indicated in the following diagram

$$\begin{array}{ccc} A_{*,*}^1 & \xrightarrow{i} & A_{*,*}^1 \\ \nwarrow k & (+1, -1) & \nearrow j \\ (-1, 0) & & (0, 0) \\ & & E_{*,*}^1 \end{array}$$

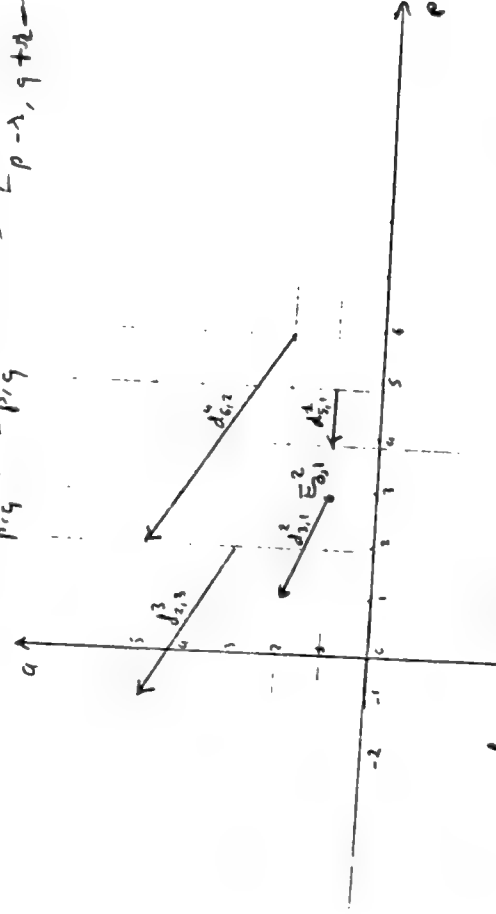
• (4.1)

In the (2-1)-st derived couple, we have the following bigradings

$$\begin{array}{ccc} A_{*,*}^2 & \xrightarrow{i^{(1)}} & A_{*,*}^2 \\ \nwarrow k & (+1, -1) & \nearrow j^{(1)} \\ (-1, 0) & & (-2+1, -1-1) \\ & & E_{*,*}^2 \end{array}$$

Note that the bigradings of  $j^{(1)}$  is  $(-2+1, -1-1)$  because  $j^{(1)} = j \circ i^{(1)}$ , hence the bigradings of  $d^1 = j^{(1)} \circ k^{(1)}$  is  $(-2, -2-1)$

A bigraded spectral sequence is displayed as follows: the point of coordinates  $(p, q)$  in the plane represents  $E_{p,q}^1$  and its subquotients  $E_{p,q}^2$ : we picture same differentials  $d^1: E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-2, q+2-1}$



This picture corresponds to the case of homology - Cohomology refers to cochain complexes, i.e.

graded differential modules with a differential of degree  $\pm 1$ . In most cases, one then has a decreasing filtration on such a cochain complex.

It is then customary to use upper indices

$$d: M^n \rightarrow M^{n+1}$$

$$F^p M^* \supset F^{p+1} M^*$$

and to write

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p M^* / F^{p+1} M^*)$$

$$A_1^{p,q} = H^{p+q}(F^0 M^*)$$

The bidegree of the  $r$ -th differential

$$d_r: E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+r, q-r+1}$$

is then  $(r, 1-r)$ , and the arrows in the picture (4.1) go "right and down", instead of "left and up".

A straightforward adaptation of (3.1), (3.2) shows that a bigraded spectral sequence converges if the filtration is finite in each degree, or even homologically finite in each degree. To wit, we have:

Theorem (4.2): Let  $(F_p M^*)_{p \in \mathbb{Z}}$  be a filtered chain complex (by an increasing filtration). Assume

$$H_n(F_p M^*) = 0 \quad \text{if } p < 0$$

$$H_n(F_p M^*) = H_n(M^*) \quad \text{if } p \geq n$$

Then,  $H_2^{p,q} = 0$  if  $p < 0$  or  $q < 0$ , and:

-24-

$$\forall z > \max(p, q+1), \quad E_{p,q}^z = E_{p,q}^\infty = G_2^p H^{p+q}(M^*)$$

Proof: we only check the condition on  $z$ . The hypothesis on the filtration implies by exactness that  $E_{p,q}^1 = 0$  if  $p < 0$  or  $q < 0$ . Thus the non-zero terms in the spectral sequence lie in the first quadrant ( $p > 0$  and  $q > 0$ ). Now, if  $z > p$ , the range of  $d_{p,q}^z$  lies in the half plane  $p < 0$  and is therefore 0. If  $z > q+1$ , the domain of  $d_{p+r, q-r+1}^z$  (whose range is  $E_{p,q}^1$ ) sits in the half-plane  $q < 0$  and is therefore 0. Thus  $E_{p,q}^1 = 0$  if  $z > \max(p, q+1)$ . //

Note that the associated graded  $G_* H_n M$  is displayed as the  $E^\infty$  terms sitting on the line  $p+q = n$ . In particular  $E_{0,n}^\infty = F_0 H_n M$  is a submodule of  $H_n M$  and  $E_{n,0}^\infty = H_n M / F_{n-1} H_n M$  is a quotient of  $H_n M$ . Here we keep assuming the hypotheses of (4.2) of course.

We conclude these introductory notes with a brief account of two important spectral sequences in algebraic topology -

### 35. The spectral sequence of a fibration

Let  $X$  be a connected CW-complex, and let  $F$  be a Hurewicz fibration with base space  $X$  and fibre  $F$ .

The CW-complex  $X$  is filtered by its skeletons  $X^{(p)}$ . We may assume that  $X^{(0)}$  is the base-point  $x_0$ . The total space  $E$  is filtered by  $E^{(p)} = \pi^{-1}(X^{(p)})$ . Let  $H_*(-; G)$  be singular homology with coefficients in  $G$ . We have an exact couple

$$H_*(E^{(p-1)}; G) \longrightarrow H_*(E^{(p)}; G)$$

$$E_{p,*}^1 = H_{p+*}(E^{(p)}, E^{(p-1)}; G)$$

which is the exact sequence of the pair  $(E^{(p)}, E^{(p-1)})$ . This exact couple yields a spectral sequence, which is called the homology spectral sequence of the fibration.

Using the fact that

$$\forall p \geq 0 \quad X^{(p+1)} = X^{(p)} \cup \{p+1\}\text{-cells}$$

it is not hard to see that the hypotheses of Thm 4.2 hold: thus

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}; G) = 0 \text{ if } p < 0 \text{ or } q < 0$$

Moreover, since the restriction of  $\pi$  to any open cells of  $X$  is a trivial fibration, one has

$$H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}; G) \cong H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \otimes H_q(F; G)$$

If  $X$  is simply-connected, one may show - this is the deepest part of the theorem - that the above isomorphism is compatible with the boundary maps of the triads  $E^{(p)}, E^{(p-1)}, E^{(p-2)}$  and  $X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)}$ . Therefore, we have:

Theorem (5.1) If  $\pi_2(X) = 0$ , the homology spectral sequence of the fibration  $F \rightarrow E \rightarrow X$  satisfies

$$E_{p,q}^2 = H_p(X; H_q(F; G))$$

$$E_{p,q}^\infty = G_p \otimes H_{p+q}(E; G)$$

If  $\pi_2(X) \neq 0$ , there still is a nice description of the  $E^2$  term, but one must use homology with local coefficients.

There is a similar result for cohomology

Theorem 5.2 If  $\pi_2(X) = 0$ , there is a cohomology spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(X; H^q(F; G))$$

$$E_\infty^{p,q} = G^p \otimes H^{p+q}(E; G)$$

Moreover,  $E_2^{*,*}$  has a bigraded algebra structure induced by the cup-product in  $E_2$ , assuming  $G$  is a ring.

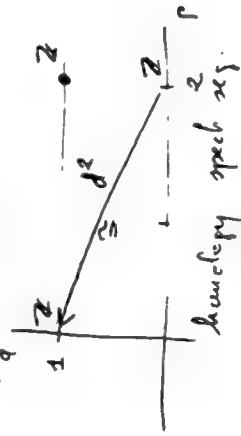
$H^0(X; H^q(F; G)) \cong H^q(X; H^q(F; G)) \xrightarrow{\cup} H^{q+q}(X; H^{q+q}(F; G))$   
and the differentials  $d_2$  are derivations, i.e.

$$d_2(x \cup y) = (d_2 x) \cup y + (-1)^{\deg x} x \cup d_2 y$$

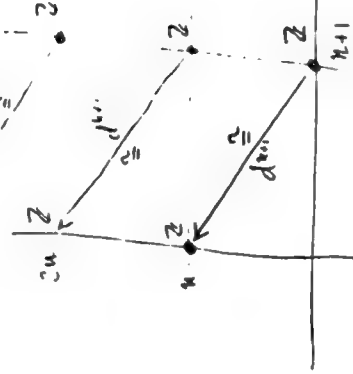
where  $\deg x$  denotes the total degree of  $x \in E_2$

Examples: We list up without proof a few classical examples

5.3 The Hopf fibration  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$



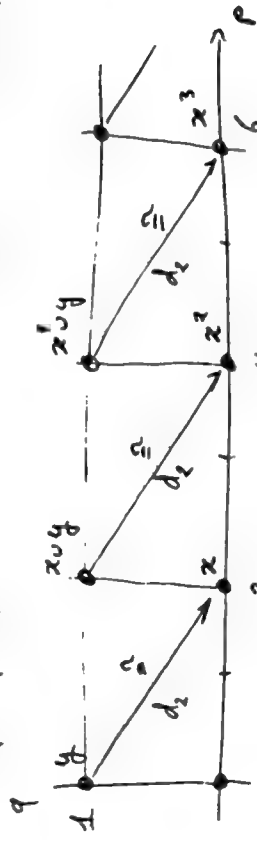
5.4 The loop space fibration  $\Omega S^{n+1} \rightarrow PS^{n+1} \xrightarrow{\#} S^{n+1}$



$$\text{Thus } H_i(\Omega S^{n+1}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq 0 \text{ mod } n \\ \mathbb{Z} & \text{if } i \equiv 0 \text{ mod } n \end{cases}$$

In the two examples above, the cohomology spectral sequence is pictured by reversing the arrows.

5.5  $(CP^\infty)$ ; cohomology spectral sequence of the Hopf fibration  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow (CP^\infty)$



each dot represents  $\mathbb{Z}$ -generators are indicated.  
By the derivation property, if  $d_2 y = x$ , one must have  $d_2(xy) = x^2, \dots, d_2(x^ny) = x^n$   
From this one deduces the algebra isomorphism  
 $H^*(CP^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$

$x$  is usually denoted  $c_2$ , the first universal Chern class.

5.6 Calculation of  $\pi_4(S^3)$

Recall  $[X, K(\pi, n)] = H^n(X; \pi)$   
Choose a map  $\gamma: S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$  which represents a generator of  $H^3(S^3, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Take its homotopy fibre  $S^3 \langle 3 \rangle$ . By the long exact sequence of homotopy groups, one has

$$\pi_i(S^3 \langle 3 \rangle) = \begin{cases} \pi_i(S^3) & i \geq 4 \\ 0 & i \leq 3 \end{cases}$$

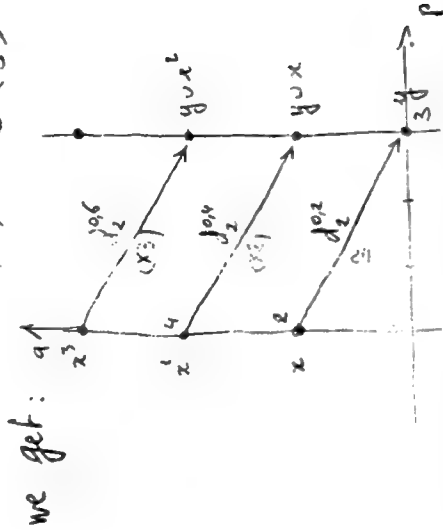
Thus by the Hurewicz theorem,

$$\pi_4(S^3) = \pi_4(S^3 \langle 3 \rangle) = H_4(S^3 \langle 3 \rangle)$$

The Spanier-Puppe fibration sequence reads:

$$\Omega K(2,3) \rightarrow S^3 \rightarrow K(2,2)$$

We write the cohomology spectral sequence for  $K(2,2) \rightarrow S^3$



$d_2^{0,2}$  must be isomorphic because no higher differentials can be non zero, therefore  $E_3^0 = E_\infty$  and  $H_k^*(S^3 \times S^3) = 0$  for  $k = 2$  and  $3$  by the Hurewicz theorem. Now  $d_2$  is a derivation, therefore  $d_2(x^2) = 2 \cdot (d_2 x) \cup x$   
 $d_2(x^n) = n \cdot (d_2 x) \cup x^{n-1}$

We get  $E_3^{3,2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $E_3^{3,4} = \mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ , ...  
 $E_3^{3,2n} = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ , and  $E_3^{p,q} = 0$  if  $p \neq 3$   
 Since  $E_3 = E_\infty$ , the associated graded has only one non-zero term in each degree. Therefore  
 $H^{2n+1}(S^3 \times S^3; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $n \geq 1$   
 $H^{2n}(S^3 \times S^3; \mathbb{Z}) = 0$ ,  $n \geq 1$   
 $H^1(S^3 \times S^3; \mathbb{Z}) = 0$

Now by the universal coefficient theorem, we get  $H_4(S^3 \times S^3; \mathbb{Z}) = \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . //

## §6. The Atiyah - Hirsch spectral sequence

We consider a generalized cohomology theory  $k^*$ , defined on finite CW-complexes. Recall that by definition,  $k^*$  satisfies the Eilenberg - Steenrod axioms, except the dimension axiom. Recall that the coefficient of the theory  $k$  are the groups  $k^q(*) = \tilde{k}^q(S^0)$

$$k^q(*) = \tilde{k}^q(S^0)$$

Let  $X$  be a finite CW-complex, filtered by its skeletons  $X^{(p)}$ . By the exactness axiom, we have an exact couple with

$$A_1^{p,q} = k^{p+q}(X^{(p)})$$

$$E_1^{p,q} = k^{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)})$$

since the filtration is finite, the spectral sequence converges and  $E_\infty = E_2$  for  $\rightarrow \dim X$  is an associated graded to  $k^*(X)$ .

Now

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= k^{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) = \tilde{k}^{p+q}(X^{(p)}/X^{(p-1)}) \\ &= \bigoplus_{p \leq q} \tilde{k}^{p+q}(S^p) \\ &= \bigoplus_{p \leq q} \tilde{k}^q(S^0) \end{aligned}$$

(by suspension axiom)

Note at this point that if  $K^* = H^*(-; G)$ , ordinary cohomology with coefficients in  $G$ , one has  $E_2^{p,q} = 0$  if  $q \neq 0$

$$E_2^{p,0} = H^p(X^{(p)}, X^{(p-1)}; G)$$

Thus the spectral sequence is concentrated on the line  $q = 0$



Therefore the differential  $d_2$  must be zero if  $\lambda > 1$ , and  $E_2^{p,0} = E_{\infty}^{p,0} = H^p(X; G)$ . We obtain a (sophisticated) proof that the cochain complex  $(H^p(X^{(p)}, X^{(p-1)}; G))_{p \in \mathbb{N}}$  with differential defined by the coboundary of the triple  $(X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$  has  $H^*(X; G)$  as cohomology: this complex is nothing but the CW cochain complex of  $X$ .

In the general case, one proves that

$$E_2^{p,q} = H^p(X; \tilde{K}^q(S^0)) \Rightarrow K^{p+q}(X)$$

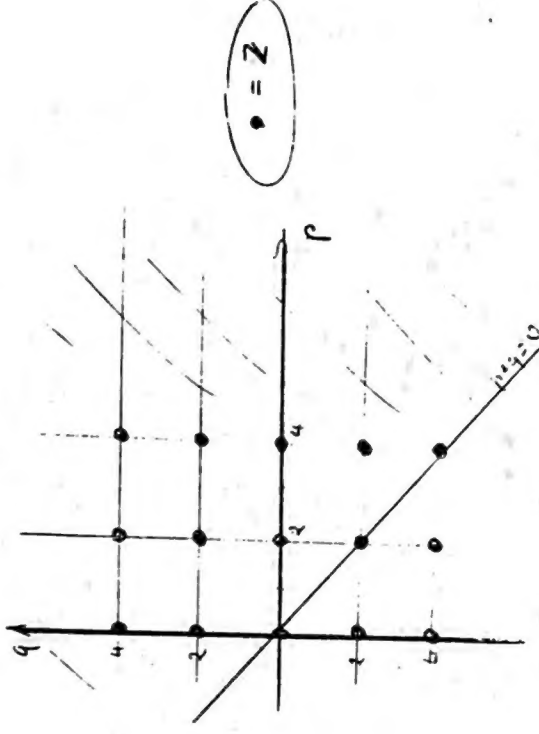
at least when  $\pi_2(X) = 0$ , otherwise one needs local coefficients. This is the spectral sequence of Atiyah and Hirzebruch, who first proved it for K-theory.

As an application, we compute  $K(\mathbb{CP}(2))$  (complex K-theory)

Recall that  $H^p(\mathbb{CP}(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  if  $p=0, 2, 4$   
 $= 0$  otherwise

$$\text{and that } \tilde{K}^q(S^0) = \mathbb{Z} \quad \begin{matrix} q \text{ even} \\ = 0 & q \text{ odd} \end{matrix}$$

The picture for  $E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{CP}(2), \tilde{K}^q(S^0))$  is



the spectral sequence is concentrated between the two vertical lines  $p=0, p=4$ . Since  $d_2$  has total degree  $+1$ , and  $E_2^{p,q} = 0$  if  $p$  or  $q$  is odd, one has  $d_1 = 0$  for all  $\lambda$ . Thus  $E_2 = E_{\infty}$ . One reads that  $K^0(\mathbb{CP}(2))$  has  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  as its associated graded, on the line  $p+q=0$ . Since this group is free abelian, there is no extension problem and  $K^0(\mathbb{CP}(2)) = \mathbb{Z}^3$ . //



# Amorce au cours sur les "groupes d'homotopie"

## Suites exactes de $R$ -modules (ref. Hu, Int. homological algebra)

Définition: Une suite exacte  $\dots \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \dots$  de  $R$ -modules est scindée en  $B$  si  $B \cong \text{Im } f \oplus \text{Im } g$ , ce qui équivaut à dire que  $\text{Im } f$  est un facteur direct de  $B$  (ie il existe  $B' \subset B / B = \text{Im } f \oplus B'$ )

Proposition: Soit  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  une suite exacte de  $R$ -modules. Les 3 assertions sont v:

- (1) La suite est scindée ie  $B \cong A \oplus C$
- (2)  $\exists u: B \rightarrow A$  inverse à gauche de  $f$ , ie  $u \circ f = \text{id}_A$
- (3)  $\exists v: C \rightarrow B$  " droite de  $g$ , ie  $g \circ v = \text{id}_C$ .

le montre  
facilement.

preuve:

Si  $B \cong \text{Im } f \oplus \text{Im } g$ , on aura ci  $B = A' \oplus C'$  où  $\begin{cases} A \xrightarrow{f} A' = \text{Im } f \\ C' \xrightarrow{g} C = \text{Im } g \end{cases}$

$\forall b = x + y \in B = A' \oplus C'$  posons  $u(b) = a$  tel que  $x = f(a)$

Alors  $u \circ f(a) = a$  par construction.

$\forall c \in C$  posons  $v(c) = c' \in C' / g(c') = c$ . On aura  $g \circ v(c) = g(c') = c$ , ce qui prouve que (1)  $\Rightarrow$  (2) et (1)  $\Rightarrow$  (3).

(2)  $\Rightarrow$  (1): On a  $B = \text{Im } f \oplus \text{Ker } u$  et  $\text{Ker } u \xrightarrow{g} C$ .

En effet, si  $b \in B$ , on écrit  $b = f(u(b)) + (b - f(u(b)))$  et si  $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } u$ ,  $x = f(a)$  et  $u(x) = 0 \Rightarrow u(f(a)) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 0$  donc  $\text{Im } f \cap \text{Ker } u = \{0\}$ .  
Donc  $B = \text{Im } f \oplus \text{Ker } u$ .

Enfin  $\text{Im } f = \text{Ker } g$  donc  $B = \text{Ker } g \oplus \text{Ker } u$  et  $g: \text{Ker } u \rightarrow C$  est injective, et surjective d'un façon triviale.

(3)  $\Rightarrow$  (1) On a  $B = \text{Im } f \oplus \text{Im } v$  et  $\text{Im } v \xrightarrow{g} C$ .

En effet, si  $b \in B$  s'écrivait  $b = f(a) + v(c)$ , on aurait  $g(b) = c$ . Prenons donc  $c = g(b)$ :  $b - v \circ g(b) \in \text{Im } f = \text{Ker } g$  car  $g(b) - g \circ v \circ g(b) = 0$ , donc il existe un unique  $a \in A / f(a) = b - v \circ g(b)$  (cf.  $f$  injective).

Ainsi  $b = f(a) + v \circ g(b)$ .

L'unicité vient aussi d'être démontrée! De toute façon, si  $x \in \text{Im } f \cap \text{Im } v$ , on

a:  $x = f(a) = v(c) \Rightarrow 0 = g \circ v(c) = c \Rightarrow x = 0$ .

Enfin  $\text{Im } v \xrightarrow{g} C$  est trivial.

□

NB: Si  $A, B$  et  $C$  sont des  $R$ -modules, la suite  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  est toujours scindée! En effet,  $\text{Im } f = \text{Ker } g$  possède un supplémentaire dans  $B$ , donc  $B = \text{Im } f \oplus C'$  et on montre facilement que  $C' \xrightarrow{g} C$  est un isomorphisme.

NB: Si  $C$  est un  $R$ -module libre, la suite  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  est toujours scindée car on construit facilement l'inverse à droite  $v: C \rightarrow B$  de  $g$  en donnant ses valeurs sur une base de  $C$ .

Toujours sur le Hu :

Th. 3.6 p 21: Si  $g \circ f$  est un isomorphisme de  $R$ -modules, où  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ , où  $f$  et  $g$  sont 2 morph. de  $R$ -modules,

alors 1)  $f$  est injective

2)  $g$  est surjective

3)  $Y = \text{Im } f \oplus \text{Ker } g$

Co 5.8 p 34 et 5.9 p 34 :

(a) La suite exacte  $\dots \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow \dots$  de  $R$ -modules est scindée en  $Y$  s'il existe un  $R$ -morphisme  $h: Y \rightarrow X$  tel que  $h \circ f$  soit un automorphisme de  $X$ . Dans ce cas  $Y \simeq \text{Im } f \oplus \text{Im } g \simeq X \oplus \text{Im } g$

(b) La suite exacte  $\dots \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow \dots$  de  $R$ -modules est scindée en  $Y$  s'il existe un  $R$ -morphisme  $k: Z \rightarrow Y$  tel que  $g \circ k$  soit un automorphisme de  $Z$ . Alors  $Y \simeq \text{Im } f \oplus \text{Im } g \simeq \text{Im } f \oplus Z$

## Bibliographie

Spanier : Algebraic Topology

Greenberg: Lectures on algebraic topology (Hom. et Cohom.)

Mansey: Tomes 1 et 2

- a) Algebraic topology: an introduction
- b) Hom. et Cohomologie (graduate texts, Springer)

Whitehead : Elements of homotopy theory (le sous de Lemaire)